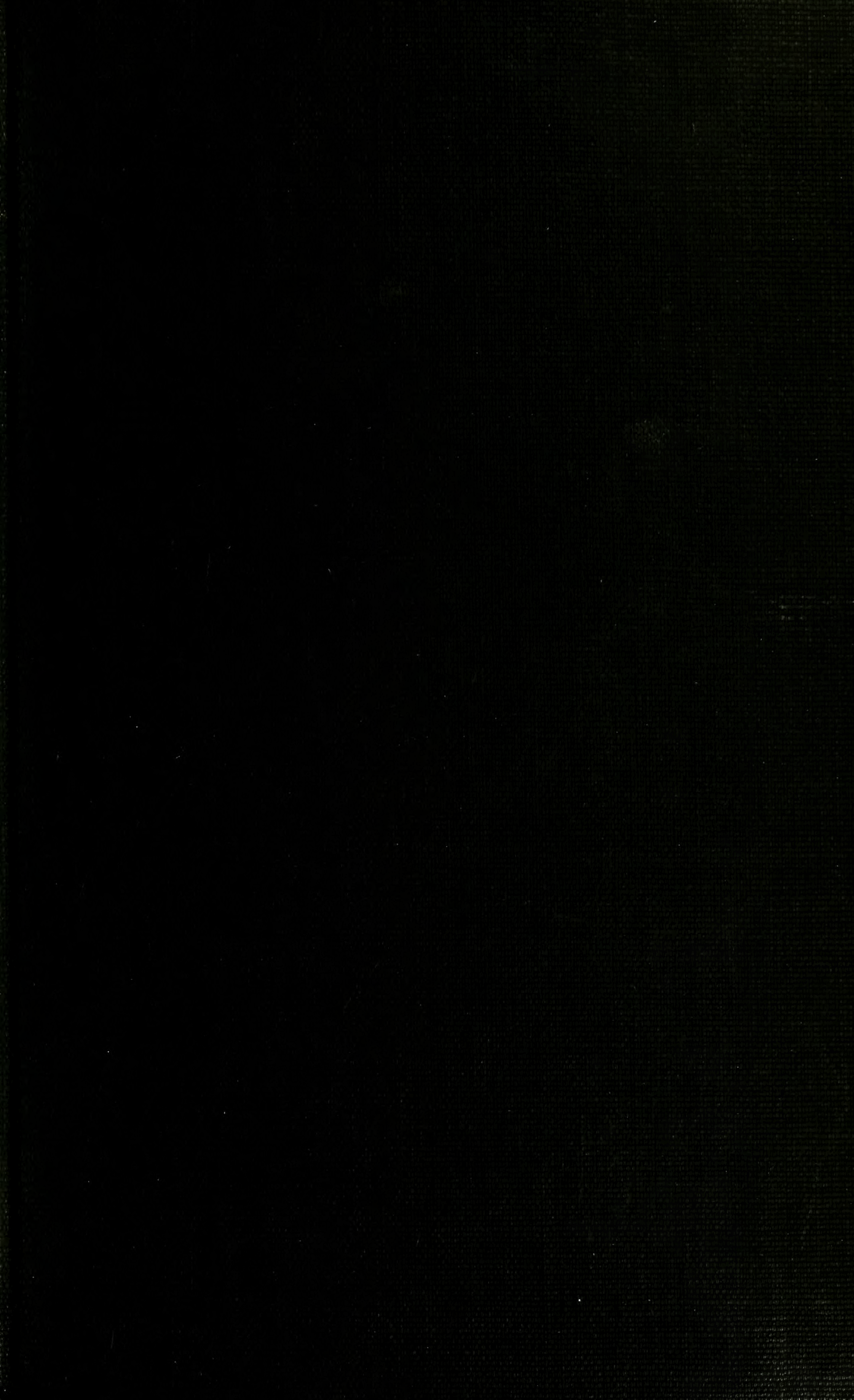
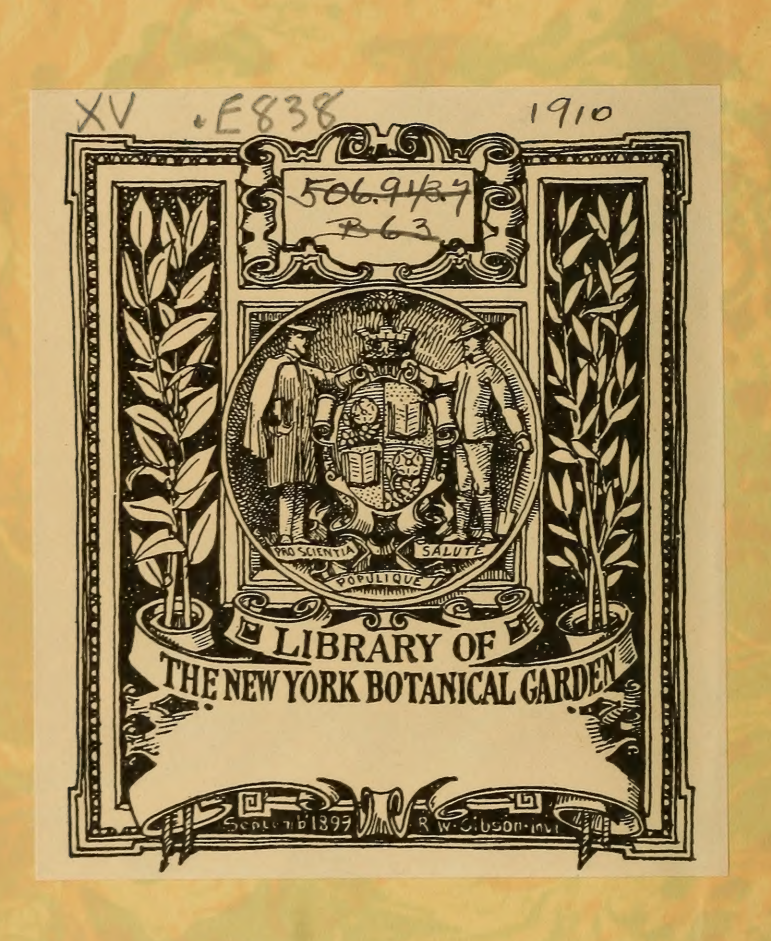



XV .E838 1910
506.91437
B63
PRO SCIENTIA
SALUTE
POPULIQUE
LIBRARY OF
THE NEW YORK BOTANICAL GARDEN
R.W. Gibson inv



SITZUNGSBERICHTE

DER KGL. BÖHM.

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-

NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

1910.

VĚSTNÍK

KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NÁUK.

TŘÍDA

MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.



VĚSTNÍK

KRÁLOVSKÉ

ČESKÉ SPOLEČNOSTI NÁUK.

TŘÍDA MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.

ROČNÍK 1910.

OBSAHUJE 18 ROZPRAV, S 3 TABULKAMI A 49 OBRAZCI V TEXTU.

V PRAZE 1911.

NÁKLADEM KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NÁUK

V KOMISI U FR. ŘIVNÁČE.

SITZUNGSBERICHTE

DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

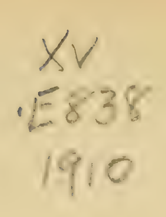
JAHRGANG 1910.

ENTHÄLT 18 AUFSÄTZE MIT 3 TAFELN UND 49 TEXTFIGUREN.

PRAG 1911.

VERLAG DER KÖNIGL. BÖHM. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI FR. ŘIVNÁČ.



Seznam přednášek
konaných
v sezeních třídy mathematicko-přírodovědecké
roku 1910.

Dne 28. ledna.

Docent Dr. Jar. Milbauer: O výrobě minia.

Dne 11. února.

MUDr K. Šulc: Pseudovitellus a podobné útvary Homopter jsou tumory symbiotických Saccharomycet.

Dne 25. února.

Dr. Ant. Grünwald: O bifokalním zobrazení kuželů kruhových.

Dne 8. dubna.

Dv. rada Prof. Dr. K. Zahradník: Některé vlastnosti oskulační na kuželosečce.

Vl. rada V. Jeřábek: Konstrukce stínu Plückerovy kon·idy.

Prof. Dr. Ant. Frič: O uložení cenomanských a diluvialních usazenin uvnitř a na silurských břidlicích mezi Kojeticemi a Lobkovicemi.

Dne 6. května.

Prof. Dr. Jos. Velenovský: Poslední dodatky ku květeně poloostrova Balkánského.

Doc. Dr. Ant. Štolc: O intracellularní agglutinaci a jevech příbuzných u Pelomyxy a jiných ústrojenců amoebovitých.

Übersicht der Vorträge
welche
in den Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe
im J. 1910 abgehalten wurden.

Den 28. Januar.

Dozent Dr. Jar. Milbauer: Über die Gewinnung von Minium.

Den 11. Februar.

MUDr. K. Šulc: Pseudovitellus und ähnliche Bildungen der Homopteren sind Wohnstätten symbiotischer Saccharomyceten.

Den 25. Februar.

Dr. Ant. Grünwald; Über bifokale Abbildung von Kreiskegeln.

Den 8. April.

Hofrat Prof. Dr. K. Zahradník: Einige Eigenschaften der Oskulationstripel am Kegelschnitte.
Reg. Rat V. Jeřábek: Schattenkonstruktion des Plückerschen Konoids
Prof. Dr. Ant. Frič: Die Lagerung der Cenomannen und diluvialen Ablagerungen innerhalb und auf den silurischen Schiefern zwischen Kojetic und Lobkovic.

Den 6. Mai.

Prof. Dr. Jos. Velenovský: Letzte Nachträge zur Flora der Balkanhalbinsel.
Doz Dr. Ant. Štolc: Intracelluläre Agglutination und verwandte Erscheinungen bei Pelomyxa und anderen amoebenartigen Organismen.

Dne 27. května.

Prof. Dr. Láska: K redukci klimatologických elementů.
Doc. Dr. J. Milbauer: Drobná sdělení o sloučeninách tetramethylammonia.

Dne 10. června.

Prof. Dr. F. Počta: O trsu stromatoporoidovém z českého Devonu.
Prof. Dr. J. Láska: Poznámky k theorii o srážkách.
MUDr. K. Šulc: O symbiotických kvasinkách pravých křísů.
Prof. Jos. Hanuš a Ferd. Petřík: Modifikace methody ethylesterové k důkazu kokosového tuku v másle.

Dne 24. června.

Doc. Dr. Ant. Štolc: O encystování Pelomyxy.
MUDr. K. Šulc: Monographia generis Trioza Foerster regionis palaearcticae.

Dne 8. července.

Prof. Dr. J. Láska: O ubývání tlaku vzdušného s postupnou výší.

Dne 28. října

Dr. B. Macků: O vlivu předčasného vyhasnutí jiskry na měření útlumu.

Doc. Dr. Ant. Štolc: O intracellularní agglutinaci a jevech příbuzných u Pelomyxy. III. sdělení.
Prof. Dr. Em. Sekera: Sdělení o dvojčatech Bothrioplany.

Dne 2. prosince.

MUDr. K. Šulc: Monographia generis Trioza Foerster regionis palaearcticae Pars II.
Prof. Dr. Jar. Wenig: O původu a významu tak zvané basalní hmoty a vývoji blánitého labyrinthu u ryb kostnatých.
Dv. rada Prof. Dr. K. Zahradník: K theorii fokoidů.

Den 27. Mai.

Prof. Dr. J. Láska: Zur Reduktion der klimatologischen Elemente.
Doz. Dr. J. Milbauer: Kleine Mitteilungen über Tetramethylemmonium-Verbindungen.

Den 10. Juni.

Prof. Dr. F. Počta: Über eine Stromatoporoide aus dem böhmischen Devon.
Prof. Dr. J. Láska: Bemerkungen zur Theorie der Niederschläge.
MUDr. K. Šulc: Über symbiotische Saccharomyceten der echten Cicaden.
Prof. Jos. Hanuš u. Ferd. Petřík: Modifikation der Ethylestermethode zum Nachweis des Kokosfettes im Butter.

Den 29. Juni.

Doz. Dr. Ant. Štolc: Über Encystation von Pelomyxa.
MUDr. Karel Šulc Monographia generis Trioza Foerster regionis palaearcticae.

Den 8. Juli.

Prof. Dr. J. Láska: Das Abnehmen des Luftdrucks mit der Höhe.

Den 28. Oktober.

Dr. B. Macků: Über den Einfluss des vorzeitigen Erlöschens des Funkens auf die Messung de Dämpfung.
Doz. Dr. Ant. Štolc: Intracelluläre Agglutination und verwandte Erscheinungen bei Pelomyxa. III. Mitteilung.
Prof. Dr. Em. Sekera: Über Zwillingsbildungen bei Bothrioplana.

Den 2. Dezember.

MUDr. K. Šulc: Monographia generis Trioza Foerster regionis palaearcticae. Pars II.
Prof. Dr. Jar. Wenig: Über die Entstehung und Bedeutung der sog. Basalsubstanz und Entwicklung des häutigen Labyrinths bei Knochenfischen.
Hofrat Prof. Dr. K. Zahradník: Zur Theorie der Focoide.



I.

Jádro a jeho dělení u Micrococcus ochraceus a Sarcin.

Napsal Doc. Dr. E. **Mencl**

S 2 obrázky v textu.

Předloženo v sezení dne 22. října 1909.

Od prvních zpráv o existenci typického jádra podaných na základě pozorování na Bacterium Gammari uplynula již léta, ale za tu dobu našlo se málo autorů, kteří se tomuto velmi vděčnému a ještě více důležitému oboru vědnímu věnovalo. A tu ještě došlo se k výsledkům odchylným, zdánlivě nesrovnatelným. Systematického zkoumání bakterií, jak je známe druh po druhu nepodjal se nikdo dosud — věc vysvětlitelná ztrnulou konservativností, jaká právě v officielní bakteriologii víc než kde jinde vládne.

Vejdovského údaje pro Bacterium Gammari platí také pro symbiotické bacilly zažívacího traktu Periplanety autorem tohoto sdělení studované, a pro celou řadu stadií v komplikovaném vývoji bakterií vláknitých z vltavské vody, pro jiné vodní bakterie a bakterie vzduchu, jak jinde bude sděleno, a dle Swellengrebela pro *Bacterium binucleatum.* Naproti tomu podána různá sdělení o existenci chromatické hmoty v bakteriích ve formě více nebo méně, obyčejně méně zdařile fixovaných spiral, jak to akcentuje právě jmenovaný amsterodamský badatel nejdříve pro *Bacillus buccalis maximus.* Po něm podobné věci udává Guilliermond, jeho obrázky ale přesvědčují více o špatné methodě než o organisaci bakterií. Exaktní vyobrazení spiral chromatických, podobných útvarům popsaným již od Schaudinna pro *Bacillus Bütschlii* před sporulací máme od Dobella pro jeho *Bacillus spirogyra* a *Bacterium lunula.*

Zdálo by se těžkým uvésti v souhlas tyto hlavní dvojí struktury chromatické, typické jádro na jedné straně a takové chromatické spiraly na druhé, kdybychom dnes nevěděli, že vývoj bakterií není tak docela jednoduchý vždycky, jak dříve se za to mělo, nýbrž že mohou míti cyklus dosti komplikovaný, jehož jednotlivá stadia jsou různými stavy chromatické hmoty charakterisována. Bohužel také zde chybí systematická pozorování.

Shrneme-li všechnu literaturu o jádře u bakterií, vidíme, že jeden tvar zbývá, kde nebylo přesně jádro dokázáno. Tvarem tím je *mikrokokkus.*

Během svých studií na *Azotobakter chroococcum* mně laskavostí prof. E. Godlewského zaslaném, náhodou jsem přišel ku kultuře žlutého mikrokokka, který dle všech znaků kultivačních byl *Micrococcus ochraceus (butyricus)*. Studia byla konána v laboratoři chemicko-bakteriologické pana inž. Fr. Kundráta, který s ochotou a obětavostí svrchovanou mi laskavě k neomezenému užívání dal svoje přístroje, nádoby, knihovnu, reagencie atd., začež mu i na tomto místě vyslovuji vřelý dík.

Od p. řiditele plzeňské rolnicko-mlékařské školy A. Rosama dostalo se mi kultur Sarcina rosea a Sarcina lutea; také jemu platí upřímné díky.

Mikroby zde jmenované byly podrobeny šetření z různých půd živných a ukázalo se, že v každém případě byly poměry jak morphologické tak tinkční atd. úplně stejné. Mikrokokkus byl studován hlavně z kultury bramborové, sarciny z agaru.

K barvení užito živé suspense v kapce vody, do níž přimísena stopa polychromní methylenové modři, které již dříve s velikým prospěchem jsem užíval při různých bakteriích, hlavně vodních, a jejíž složení udal jsem již dříve.

Ukázalo se, že nebarví se všechny kokky stejně. Jedny barvily se bledě modře, jiné černomodře. Vzato-li očko na bramborové kultuře mikrokokka z mladičké ještě ne žluté nýbrž bělošedé vrstvy, převládala individua bledá a naopak. Zdá se tedy, že stářím barvitelnosti přibývá. Co do tvaru byla tu individua samostatná, kulovitá, nebo diplokokky; tam kde jeden z diplokokků se rozdělil, byla skupina tří, z nichž jeden byl půlkruhovitý, druhé čtvrtkruhové. Vůbec vždy tam, kde ve skupině, tedy i v tetradě, jednotlivá individua k sobě přiléhají, jsou omezena přímou čarou — na venek jsou omezena kruhovým obloukem. V takové trojici nebo tetradě, ano i u diplokokků,

nemusí býti všechna individua stejná — jedna jsou tmavá, druhá světlá.

U oněch světlých nejdříve daly se pozorovati velmi zajímavé věci svědčící o tom, že i kokky, které jsme ochotni považovati za z bakterií nejnižší, že i ty mají těleso odchylné barvitelnosti než kokkus sám, těleso zavádějící svým dělením dělení celé buňky, tedy neúsporné j á d r o. Je to fakt, který nebude-li násilně překrucován, je novým pádným důkazem proti dogmatikům bezjadernosti bakterií i jiným kardinalní pojmy cytologické lehkomyslně ignorujícím zmateným výkladům, domněnkám a pohádkám.

Struktura individuí světlých i tmavých je táž. Vyjdeme od základních tvarů, kokka. Plasma, jak zmíněno, je světle modrá, homogenní. Na venek není žádný patrný obal přítomen. Uvnitř těla buněčného v poloze pravidlem centralní, ale často také excentrické až docela krajové zříme kruhový, jasný, bezbarvý dvůrek, obsahující černomodré tělísko. Útvar tento je nesporné jádro — polohou, mikrochemickou povahou a svými proměnami.

Proměny ty jsou dosti jednoduché. Zavádí-li se dělení, tu dvůrek se elipticky protáhne. Brzy potom rozdělí se temné tělísko, a postaví se obě dceřinná tělíska na konce dlouhé osy ellipsy. Tělo buněčné přitom podržuje tvar kulový — někdy ale i ono často mění poněkud tvar prodlužujíc se v ellipsoid s dlouhou osou souhlasnou s dlouhou osou dělící figury. Elliptická forma kokka vystoupí nápadněji utvořením dvou dceřinných jader, načež hned následuje utvoření přehrádky, správněji štěrbiny a tím utvoření diplokokka. Opakováním dělení v obou diplokokkách vzniká tetrada.

V některých případech rozdělí se dvůrek obsahující dvě chromatinové koule, ale oba dceřinné dvůrky, přiléhající na sebe, postavily se na kraj. Takové případy je mi dnes dosud nemožno blíže vysvětliti.

Také se vyskytují případy, kdy se tělo buněčné rozdělí ve dva kokky hned jak se rozdělí jádro, a to ještě dokud obě dceřinná jádra k sobě přiléhají. Tím dostaneme figuru zvláštního vzezření, kde se dotýkají dvě koule plasmatické a v místě doteku zase uvnitř jich na sebe tangirují dva světlé dvůrky obsahující po nápadném chromatickém zrně.

Různá stadia vývoje od Micrococcus ochraceus (butyricus) jsou zobrazena na přiložené Fig. I.

Položíme-li takový intra vitam zbarvený praeparat (který už tak poskytuje skvělý a překvapující obraz pod mikroskopem, od kteréhož

obrazu těžko je se odtrhnouti) do vlhké komory skleněné na 24 nebo i jen na 18 hodin, změní chromatické koule barvu a místo modrého elementu barvícího z methylenové modři, azuru, přijmou druhý element, t. zv. „Rot aus Methylenblau“ a zbarví se tím žhavě nachově. (Je všeobecně známo, že „Rot aus Methylenblau“ dá se snadno isolovati z polychromního roztoku — nelze ale s barvou touto podniknouti žándých pokusů, protože, jak známo barva tato je zcela

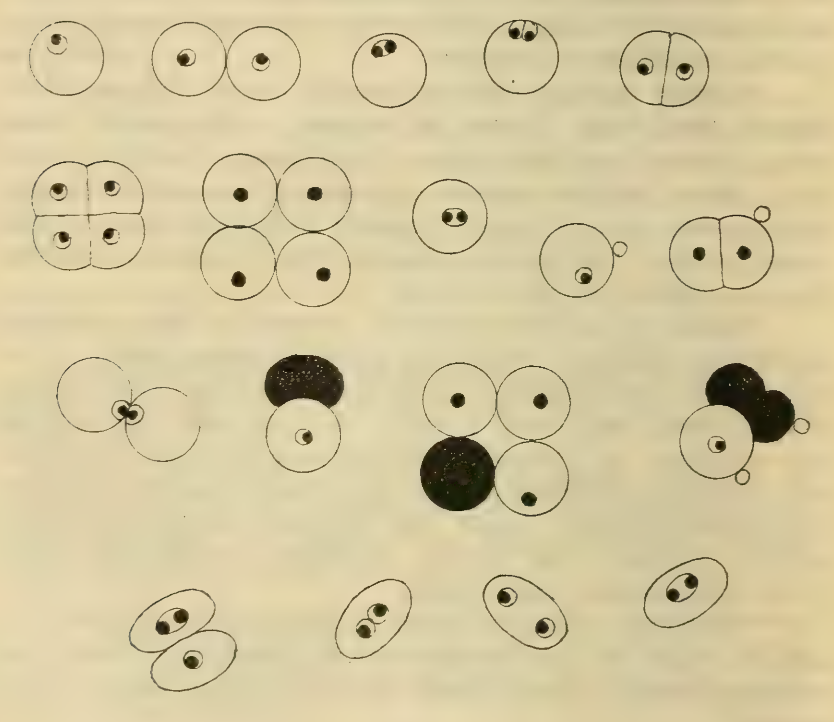


Fig. 1.

inaktivní a barví jen za přítomnosti elementu modrého). Přimyslíme li si k tomu, že i individua černomodře zbarvená vykáží vesměs žhavě červené kuličky chromatinové — tu je pochopitelno, že celý obraz v mikroskopu, zářící blakytnou modří a temnou modrou barvou, obojí skropené krvavými kapkami, působí dojmem překvapujícím a nezapomenutelným, podporovaným ještě docela stejným pravidelným uspořádáním diplokokků, trojic a tetrad.

Řekli jsme, že jaderné poměry u individuí světlých i tmavých

jsou stejné až na to, že u individuí tmavých není patrný achromatický dvůr kolem chromatinové koule.

Omezíme se na tomto místě na stručný popis právě podaný. Jen ještě několik poznámek dlužno přičiniti. Červené zbarvení chromatinu je tak stálé, že conc. acid. aceticum glaciale, všechno odbarvující a i rozpouštějící, nedovede aspoň po dost dlouhou dobu ani odbarviti tento chromatin. — Chceme-li nahlédnouti do vnitra individuí tmavých, stačí přidati kapku glycerinu pod krycí sklíčko. Nastane odbarvení a differenciace barvy aniž by barvou vytaženou se zabarvilo zorné pole, což není bez významu pro pozorování. Účinek tento vzniká utvořením kyseliny boroglycerinové, mírné to kyseliny organické, ač glycerin je neutrální a borax basický. V tomto případě ovšem samozřejmě nedostaví se metachromasie jádra ani po sebe delším prodlení praeparatu ve vlhkých komůrkách.

Dalším ne nezajímavým zjevem je množství maličkých kuliček sedících na různých individuích, hlavně z takových míst kultury, kde vrstva mikrokokků je v direktním kontaktu se živnou půdou. Kuličky tyto barví se tedy bledomodře, i když přisedají na individua temná. Jodem se barví červenohnědě, jsou ale ve vodě nerozpustné. Není to tedy glykogen, nýbrž amyloidy.

Sarcina rosea i *lutea* vykazují struktury za klidu i v dělení totožné. Není tedy třeba znovu je popisovati. Specielně pro *Sarcina lutea* zjistil jsem jeden zjev, který rozhodně stojí za zaznamenání. Text. fig. II.)

Sarcina lutea roste, přeočkována na agar velmi divoce — asi tak divoce jako je známo na př. pro *Corynebacterium* (*Bacillus*) *diphtheriae.* Již za několik hodin jeví se v linii očkovací řada krásně žlutých perliček. Vezmeme-li odtud jehlou trochu materialu, uděláme v kapce vody suspensi bakterií, obarvíme atd. — dostaneme mimo typické kokky ohromné množství plasmatických světlemodře obarvených, chromatinové koule obsahujících, trojhraných, čtyřhraných, ledvinitých a. t. d. těles.

Je zřejmo, že se jedná o pravá syncytia, způsobená divokým vzrůstem tohoto mikrokokka. Jádra dělí se totiž tak rychle, že plasma nestačí se děliti. Protože ale dceřinná jádra mají jakousi tendenci odpuzující. protáhnou plasmu ve svém smyslu. Tak na první figurce textového obrázku II. rozdělilo se jádro na dvé a jedno dceřinne hned se za roz-

dělilo. Podobně na figurce třetí a páté. Tím vznikne trojúhelník. Figurka čtvrtá ukazuje, jak se jedno jádro rozdělilo na dvě, dceřinné jedno na dvě vnuková (sit venia verbo) a obě tato v kolmém směru na dřívější dělení na pravnuková. Zde máme syncytium o 4 generacích.

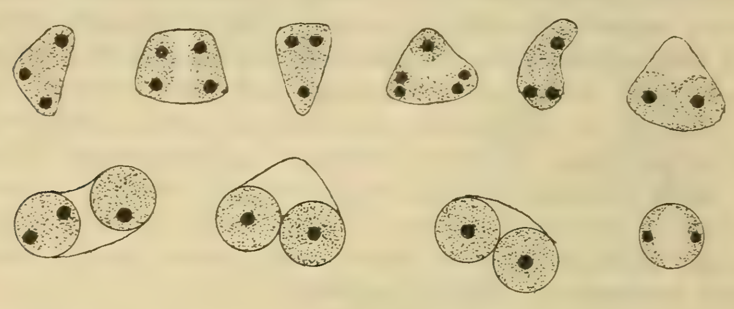


Fig. II.

Leč už na figurce druhé, kde se obě dceřinná jádra znova rozdělila, vidíme, že dělení jader nejde daleko příliš bez rozdělení plasmy. Tady už se plasma smršťuje kolem jader. V praeparatu je celá plocha syncytia jemně zbarvená modře, kolem jader temněji (blankytně); na cliché dá to se ovšem těžko znázorniti, pročež je dlužno bílá místa mysliti sobě velmi jemně světle modrými.

Podobné seskupení jeví i figurka čtvrtá, kde ve vrcholu vidíme už seskupení plasmy podobné kokku. Také skutečně najdeme figury troj- nebo čtyřhranné, kde hotové kokky jsou spojeny bleděmodrým mostem, jak toho příklady jsou znázorněny v dolní řadě figurek texvého obrázku č. II.

Je zřejmo, že úplná shodnost ve struktuře, barvitelnosti, dělení, jak jsme viděli u *Micrococcus ochraceus* (*butyricus*) a Sarcin, dává nám na ruku, že i ostatní mikrokkoky budou podobně nebo stejně stavěny. Parallelní studie na pathogením druhu, hnisavém *Staphylococcus pyogenes aureus* nedaly mi žádoucích výsledků. Druh tento je obalen tuhou blanou, (je známo, že je to druh velmi resistentní) která nepřipouští rychlé vniknutí barvy a tím rychlou differenciaci buněčných organel. Leč i zde často daly se v některých, obal opustivších buňkách pozorovati kuličky povahy chromatinové.

II.

Studie o výrobě minia.

(Fysikálně-chemických studií o miniu části praktické část prvá.)

Sděluje docent Dr. Jaroslav Milbauer.

Se 2 obr. v textu.

Předloženo v sezení dne 28. ledna 1910.

Jelikož v dosavádních svých studiích fysikálně-chemických o miniu uveřejněných ve Věstníku král. české společnosti nauk (1908, č. XIV; 1909, č. XXIV. a 1909 č. XVIII.) došel jsem tak daleko, že mechanismus synthesy i rozkladu jsem prostudoval a potřebné podmínky nejlepších výtěžků našel, obrátil jsem nyní pozornost svoji ku applikaci technické.

Nežli však přikročím ku jádru práce této a ku diskussi nových výsledků, považuji za nutné zrekapitulovati jednak technickou výrobu minia a jednak resultáty svých dosavadních studií, pokud mají s ní souvislost. Tovární výroba minia jest v základě industrií starou, známou již Římanům. Žíháním běloby olověné na vzduchu byla připravována — operace velmi zdlouhavá, jelikož oxydace na vzduchu velmi zvolna pokračuje.

V literatuře odborné podal první zprávu o technické výrobě minia Lunge (Jahresber. 18. str. 327). Popisuje způsob, který vypracován nejprv v Anglii, udržován dlouho v tajemství, přece později ve známost vešel, jak v Anglii samé, tak i v ostatní Evropě. Výroba rozpadá se i dnes ve dvě operace; první, v Anglii zvaná „dross", týká se přeměny olova v kysličník olovnatý. Děje se tak obyčejně v pálacích pecích. Získaný kysličník olovnatý, plavením zbaví se olova nezoxydovaného a třením pod vodou rozmělní se v jemný materiál, který skýtaje velký povrch, snadněji na vzduchu se oxyduje a ohni-

vější minium poskytuje. Tuto druhou operaci, při níž vlastní červená barva vzniká, nazývají v Anglii „colouring". Mimo pecí pálacích, užívají v moderní době také litinové mísy, opatřené míchadly. Vzduch čistý, neobsahující mechanicky stržený prach, musí mít ku kysličníku olovnatému dostatečný přístup. Materiál se vždy as za hodinu obrací a teplota reguluje se tak, aby zorné otvory jevily třešňovou barvu. Přikládání paliva děje se opatrně, aby nepřestoupla teplota temný červený žár. V peci zůstane materiál as 48 hodin, a není-li nahodilých překážek v pravidelném chodu, získá se minium. Tento výrobek nikdy není 100%ním složení Pb_3O_4, nýbrž vždy mívá v sobě jestě nezoxydovaný kysličník olovnatý, tak že vykazuje titr nižší. Dle Houton-Laballardierea (Annales de chimie et de physique 35. 96) mívají i nejlepší druhy minia 16 až 31% kysličníku olovnatého.

Oxydace technického kysličníku olovnatého vzduchem jde velice zvolna. Byly mi dány k disposici následující preparáty, které jsem zanalysoval a jež pochod při druhém stadium (colouring) v pálací peci dobře objasňují. Jsou vzaty z jedné rakouské továrny při normálním chodu pecí.

Po první hodině:

I.	v 7	h. ráno	obsahoval	produkt	0·4%	Pb_3O_4
II.	v 9	„ „	„	„	3,7%	„
III.	v 11	„ „	„	„	3,7%	„
IV.	v 1	„ odpoledne	„	„	41,9%	„
V.	v 3	„ „	„	„	56,8%	„
VI.	v 5	„ „	„	„	64,3%	„
VII.	v 7	„ ráno druhý den	„	„	89,6%	„

Čísla tato vnesena jsou v grafické řešení a poskytují obr. 1.

Jak viděti, jest rychlost reakční z počátku malá, pak stoupá a zvolna směřuje k jistému maximu.

Z dosavádních mých prací bylo patrno, že:

a) ne každy materiál stejně rychle se oxyduje, tak krystallinický, chemicky čistý kysličník olovnatý velmi zvolna se oxydoval a nebylo ani po 8 hodinách v kyslíku docíleno rovnovážného stavu, maxima. Jemný materiál, který povstal z běloby, poměrně velice rychle proměnil se v kyslíku v minium s max. obsahem Pb_3O_4, a to v době tří hodin. Jest tedy i z této stránky pochopitelno, proč ku výrobě minia běloba jest tak ceněna.

b) Nejpříhodnější teplotou pro vznik minia ukázala se mez 450–480° C. Nad teplotou tou nastával rozklad a pro praxi technickou dvojí ztráta: na palivu i produktu.

c) Krátce trvající přehřetí nespadá v praxi na váhu, jelikož také rozklad neděje se okamžitě, nýbrž má průběh časový. V jistém smyslu možno mluviti také o kompensaci — při vysoké teplotě rychlost, kterou reakce směřuje k rovnovážnému stavu je větší a tudíž získá se na čase; nastane-li pak vyregulování teploty, jest produkt téže hodnoty, dříve však hotov. Ukáži později, jak dalece tento předpoklad kombinovaného způsobu pracovního je výhodný.

d) Rovnovážný stav posune se dále v rovnici:

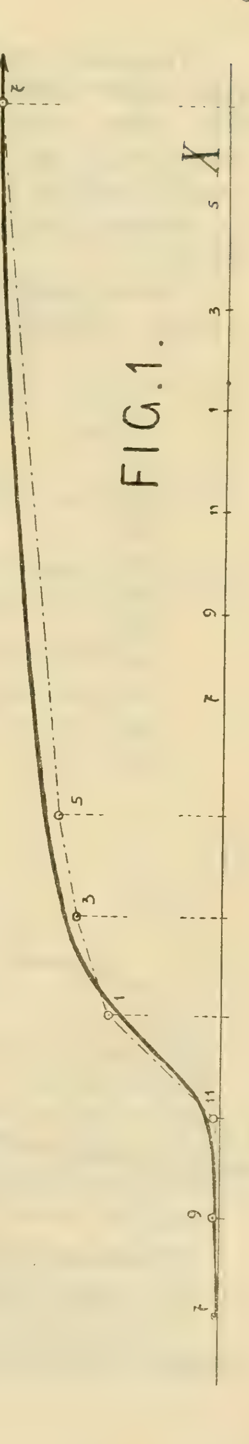
$$3PbO + O \rightleftarrows Pb_3O_4$$

směrem na pravo, zvýší-li se parcielní tlak kyslíka, i jsou produkty v kyslíku získané bohatší kysličníkem olovnato-olovičitým, nežli ve vzduchu.

Nové pokusy dělal jsem s materiálem dvojím, jednak technickým kysličníkem olovnatým, klejtem, pocházejícím z rudního olova korutanského, jednak s odpadkem po výrobě dusanu, kysličníkem to olovnatým, který již něco vyššího kysličníku obsahuje. Dělníci v praxi jmenují jej „n i t r i t e m“; budeme jej dále nazývati „klejtem nitritovým“.

Analysou nalezeno, že obsahovaly:

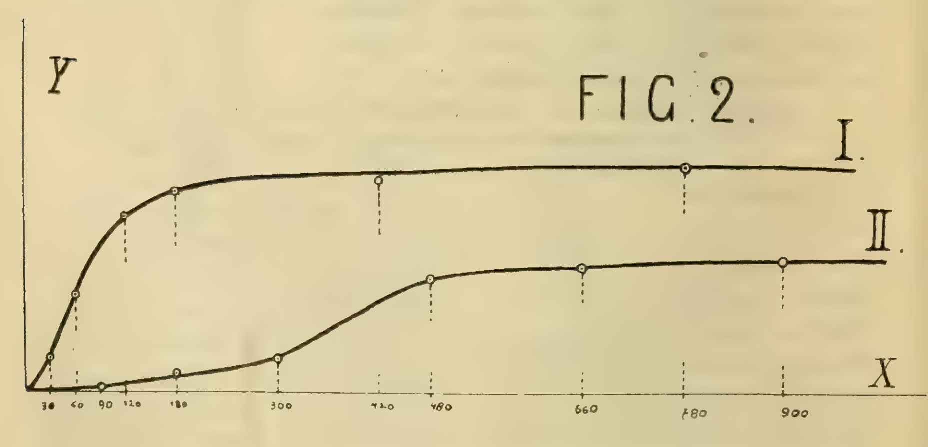
	Technický kysličník olovnatý	„Nitritový klejt“
Nerozpustný podíl	0,03	0,12
Pb	6,43	—
PbO	93,10	93,52
Pb_3O_4	0,2	5,96
Ag_2O	—	0,001
Bi_2O_3	0,0006	—
CuO	—	0,0007
Fe_2O_3, Al_2O_3	0,0005	0,0004
CaO	0,0057	0,006
Na_2O		0,06
N_2O_5		0,12
CO_2 a ztráty (z difference)	0,23	0,21
	100,00	100,00



Pracováno s nimi v pokusné peci, jež popsána v prvém oddílu studií v části theoretické, kyslík o konstantním tlaku brán z gazometru známé konstrukce, jak dosud jej užívám při svých pracích. Vzduch čerpán byl přes zkoušený materiál pumpou, hnanou teplovzdušným motorem a sice takovou as rychlostí, s jakou pracováno při pokusech s kyslíkem. — Teplota 460° C nepatrně kolísala v mezích ± 2°.

Chování kysličníku technického ve vzduchu a v kyslíku nejlíp je patrno z připojeného diagrammu, kam vnesena nalezená čísla.

	Technický PbO	
Čas:	v kyslíku (I.)	ve vzduchu (II).
30 min.	13,1% Pb_2O_3	—
60 „	38,9% „	—
90 „	—	1,5 % Pb_3O_4
120 „	70,23% „	—
180 „	79,29% „	7,58% „
300 „	—	13,34% „
420 „	84,29% „	—
480 „	—	44,88% „
660 „	—	48,52% „
780 „	89,76% g	—
900 „	—	52,36% „



Srovnáme-li křivku obdrženou zde pro vzduch s grafickým řešením, do něhož vneseny výsledky nalezené v továrně pozorujeme celkem shodu.

Zajímavé pozorování učiněno s plaveným „nitritovým klejtem". Zjištěno, že při vyšší teplotě, totiž 500° C, rychleji dojde se k pre-

parátu o téže hodnotě po době 1 hodiny jako s technickým kysličníkem po době 15 hodin.

	Nalezeno při techn. PbO při 460°	Při „nitritovém klejtu" a teplotě 500°
v době — min.	—	5,9 proc. Pb_3O_4
15 „	—	15,56 „ „
30 „	—	22,44 „ „
60 „	—	**47,12** „ „
120 „	—	71,60 „ „
180 „	7,58	84,52 „ „
900 „	**52,36**	—

Zdá se tedy, že vyšší teplota nežli optimalná jest pro rychlost tvorby minia výhodná.

Že pro výrobu samu jest dáti přednost „nitritovému kejtu" oproti technickému kysličníku dokazují nejlépe následující pokusy. *)

Po tříhodinném žíhání ve vzduchu resultovaly preparáty

	z techn. PbO	„z nitritového klejtu"
při 300°	—	23,4 proc. Pb_3O_4
400°	5,9% Pb_3O_4	30,9 „ „
440°	—	50,8 „ „
460°	—	74,0 „ „
490°	11,22% Pb_3O_4	—
500°	—	46,52 „ „
530°	—	—
550°	5,2% Pb_3O_4	—
570°	0,2% „	0,2 „ „

Velké důležitosti pro práci jak theoretickou tak praktickou byla okolnost by material zkoušený byl stejnorodý, stejné provenience, neboť pak byla čísla srovnatelná. U všech preparátů ať jsou jakéhokoliv původu, jsou-li chem. čistým kysličníkem olovnatým anebo alespoň techn. čistým dojde se k určitému rovnovážnému stavu, doba však za kterou se tak stane velice se různí. Poučí nás o tom následující tabulka. Preparáty byly získány za stejných okolností, pouze provenience materialu byla různá.

---

*) Vliv ten není zaviněn přítomností nitritů a nitrátů, jak v druhé části práce nalezeno.

Materiál:	Rovnovážný stav dosažen v kyslíku po době:
Chem. čistý PbO	16 hodin
PbO z $PbCO_3$	3 „
PbO z PbO_2	4 „
Technický PbO	13 „
PbO ch. č. od firmy Merck*)	$2^1/_2$ hodiny
Plavený „nitritový klejt“	6 hodin

Hraje zde velikou roli pravděpodobně tvar a velikost reakčního povrchu, jako tomu jest při jiných heterogenních systemech na př. rozpouštění mramoru v kyselinách a p.

Doufal jsem, že plavením velkého množství materialu dojdu ku řadě preparátů o nestejném zrnu a nestejné reakční schopnosti.

Do velké as 8 litrové lahve rozmícháno 1.850 gr. „nitritového klejtu“ s 6 litry alkoholu 96%ního. Protřepáno důkladně a po 2 minutách po usazení rychle stažena tekutina a sedimentováno dál.

Celkem získány tyto podíly:

I. nejhrubší	1291 *gr*	o velikosti průměrné	5,5 μ **)
II. hrubší	550 „	„ „ „	3,5 „
III. jemný	4 „	„ „ „	1 „
IV. nejjemnější	4 „	„ „ „	0,5 „
Celkem	1849 *gr*		

Žíhány v kyslíku při teplotě 450° C po dobu jedné hodiny a poskytly preparáty obsahující:

Původní	o velikosti zrn 0,2 μ	max 35 μ	. 23,7 proc. Pb_3O_4
I.	„ „ „ 0,25 „	„ 13 „	. 23,1 „ „
II.	„ „ „ 0,25 „	„ 10 „	. 23,2 „ „
III.	„ „ „ 0,25 „	„ 7 „	. 23,15 „ „
IV.	„ „ „ 0,25 „	„ 3,5 „	. 23,6 „ „

Pokusy tyto ukazují, že rozhodujícím faktorem při rychlosti reakce je provenience; při materialu stejného původu rychlost ta byla stejnou, ačkoliv velikost zrn hmotu skládající byla rozdílná.

Značnou měrou uplatňuje při reakci partialní tlak kyslíku, jak již v prvním oddílu práce jsem naznačil.

Patrno je to z těchto čísel, která získána po 3 hodinném žíhání technického kysličníku olovnatého při 450° C v různých směsích kyslíku se vzduchem.

*) Byl připraven pravděpodobně z běloby.
**) Měřeno pod mikroskopem.

Směs obsahující

20%	kysliku	poskytla	preparát	obsahující	7,4	proc.	Pb_3O_4
40%	„	„	„	„	25,88	„	„
60%	„	„	„	„	39,6	„	„
80%	„	„	„	„	61,48	„	„
100%	„	„	„	„	79,8	„	„

Nedocíleno tu nikdy minia 100%ního.

O tom jak lze minium tohoto titru připraviti, později zprávu podám.

Z laboratoře chemické technologie na c. k. české vysoké škole technické v Praze.

IV.

Die bifokale Abbildung von Kreiskegeln auf die Punkte der Ebene.

Von **Anton Grünwald** in Prag.

Mit 8 Textfiguren.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. März 1910.)

I. Haupteigenschaften der gewöhnlichen sphärischen Kegelschnitte.

§ 1.

Das Zeichnen auf der Kugel. Der gewöhnliche sphärische Kegelschnitt. Da man ähnlichen Kegelschnitten dieselbe Form zuspricht, gibt es ∞^1 Formen von solchen. Von reellen Kreiskegeln oder reellen Kegeln zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=o \quad . \quad . \; (a^2 \geqq b^2 > o, \; c^2 > o) \; . \; . \; . \; (1)$$

gibt es dagegen ∞^2 Formen, da es zu jedem solchen Kegel keinen ähnlichen gibt, der ihm nicht kongruent wäre. In (1) sind die rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z so gewählt, daß zur Z Achse die „innere" Symmetrieachse des Kegels genommen ist, d. h. jene, $\begin{matrix}\text{durch welche}\\ \text{senkrecht zu welcher}\end{matrix}$ sich keine reellen $\begin{matrix}\text{Tangentialebenen}\\ \text{Kanten}\end{matrix}$ des Kegels angeben lassen; ist der Kegel kein Rotationskegel ($a^2 \neq b^2$), so sollen zur X und Y Achse die Symmetrieachsen des Kegels so gewählt werden, daß $a^2 > b^2$ bleibt. Die $\begin{matrix}xz\\ yz\end{matrix}$ Ebene schneidet den Kegel in

den reellen $\begin{matrix}\text{„Haupt" —}\\ \text{„Neben" —}\end{matrix}$ Scheitelkanten $\left(\begin{matrix} y=o, & \dfrac{x^2}{z^2}=\dfrac{a^2}{c^2}=tg^2\,\alpha \\ x=o, & \dfrac{y^2}{z^2}=\dfrac{b^2}{c^2}=tg^2\,\beta \end{matrix}\right)$,

welche mit der inneren Kegelachse Z den — zwischen 0^0 und 90^0 zu messenden — Winkel $\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}$ einschließen, dessen

$$tg^2\,\alpha = \frac{a^2}{c^2} > tg^2\,\beta = \frac{b^2}{c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ist. α und β sind die „Halbachsen" des auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zu denkenden (gewöhnlichen) sphärischen Kegelschnittes, $\begin{matrix}2\alpha\\2\beta\end{matrix}$ die sphärische $\begin{matrix}\text{„Haupt"-}\\\text{„Neben"-}\end{matrix}$ Achse des Kegels.

Beim Studium dieser Kegel, welches auf die Betrachtung der unendlich-fernen Kegelschnitte hinausläuft, benützt man mit Vorteil statt einer ebenen Zeichentafel eine Zeichenkugel[1]), dazu (neben dem gewöhnlichen Zirkel) zum Zeichnen größter Kreise ein „Lineal der Kugel", d. h. eine genau zur Zeichenkugel passende hohle Halbkugel, an deren freiem Rande, der die Form eines größten Kugelkreises hat, sich eine Gradeinteilung genau so anbringen läßt, wie etwa eine Maßeinteilung auf einem gewöhnlichen (ebenen) Lineale. Ist außerdem das Kugellineal „punktiert", d. h. mit einer kleinen Öffnung genau in der Mitte der Halbkugelfläche versehen, so ist es leicht, mit seiner Hilfe von einem Kugeldurchmesser zur senkrechten — absolut-polaren — Durchmesserebene überzugehen und umgekehrt[2]).

Durch „Orientierung", d. h. Angabe eines Durchlaufungssinnes (⟶) kann man auf einem Kugeldurchmesser die beiden Schnittpunkte desselben mit der Kugelfläche genau so auseinanderhalten, wie auf einer Durchmesserebene die beiden in ihr vereinigt gelegenen entgegengesetzt orientierten Spurkreise der Kugel.

Willkürlich kann man sich ferner durch die Orientierung eines Durchmessers die Orientierung des zugehörigen Äquatorialkreises mitbestimmt denken, je nachdem man z. B. der von Süd nach Nord orientiert gedachten Erdachse die „linkshän-

---

[1]) Wie dem Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung v. 8. Mz. 1910 (19. Bd. 2 Heft, S. 56, 57) zu entnehmen ist, sind in dem bekannten Verlage von Fr. Schilling (dreierlei in verschiedenen Größen angefertigte) Zeichenkugeln erhältlich, u. zw. samt den zugehörigen Hilfsmitteln zum Einzeichnen größter und kleinerer Kreise und zum Übertragen gegebener Winkel auf größten Kreisen.

[2]) Ein solcher Übergang zur Kugelspur des absolut-polaren Elementes kann beispielsweise dazu dienen, die Konstruktion der beiden „orientierten", d. h. mit einem Durchlaufungssinn (⟶) versehenen größten Kugelkreise, welche (als Tangentialkreise) zwei gegebenen orientierten Kleinkreisen gemeinsam sind, zurückzuführen auf die gewöhnlichere Aufgabe: „Die beiden Schnittpunkte zweier Kleinkreise auf der Kugel anzugeben."

dige“ oder die „rechtshändige“ Durchlaufung des Äquators als entsprechend setzt.[1])

Der im § 2 und 3 verwendete Begriff der „Spiegelung eines (orientierten) Kugeldurchmessers an einer (nicht-orintierten) Ebene“ ist wohl ohneweiteres verständlich, da man auch im gewöhnlichen Leben von der Spiegelung der Uferbäume z. B. an der Wasserebene zu reden gewöhnt ist. Diese Spiegelung ist mit den erwähnten Hilfsmitteln bei Zugrundelegung der Kugelspuren ebensoleicht konstruktiv durchzuführen als die duale Aufgabe: „Eine (orientierte) Durchmesserebene ist an einem (nicht-orientierten) Durchmesser der Kugel zu spiegeln“ oder, wie man mit Wiener[2]) sagen kann, „um diesen Durchmesser umzuwenden“ (d. h. um 180° zu drehen).

§ 2.

Bedeutung der zyklischen Ebenen und der Fokalachsen eines Kegels für das konstruktive Zeichnen des zugehörigen sphärischen Kegelschnittes.[3])

Unser Kegel (1) oder

$$\frac{x^2}{tg^2\,\alpha} + \frac{y^2}{tg^2\,\beta} - z^2 = o \quad . \quad . \ (tg^2\,\alpha \geqq tg\,\beta) \quad . \quad . \quad . \ (1')$$

ist leicht durch seine Spur auf der Zeichenkugel darzustellen, sobald (durch ihre gleichnamigen Kugelspuren) gegeben sind: eine

Kante (etwa k in der Fig. 1)	Tangentialebene (etwa K in der Fig. 2)

und die beiden reellen

zyklischen Ebenen H und H'	Fokalachsen f und f'
$\frac{y^2}{z^2} = \frac{b^2}{c^2}\,\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}$, ... (3)	$y = o, \ \frac{x^2}{z^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}$, . . . (5)

welche mit der inneren Kugelachse z einen — zwischen 0° und 90° zu messenden — Winkel

φ, die „zyklische Halbweite“ des Kegels,	ψ, die „fokale Halbweite“ des Kegels,

einschließen, dessen

[1]) Sir R. Ball (Proc. of the Royal Irish Ac. v. XXVIII., sect. A, No 2, p. 18, 19) nennt die Drehung der Sonne „linkshändig“ bezüglich des vom Erdmittelpunkte zum Nordpole führenden Radius.

[2]) Verh. der Dresdner Ges. d. Wis. 1890.

[3]) (Vergl. ebenso) Reye, Geom. d. Lage, 1886. 1. Bd. S. 179, 183, 219.

$$tg^2\varphi = \frac{b^2}{c^2}\,\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2} =$$

$$tg^2\varphi = tg^2\beta\,\frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha - tg^2\beta} \quad \ldots (3')$$

$$\left(\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^{1)} \text{ ist.}$$

Es sind dies die beiden reellen Ebenen, deren Minimalstrahlen, Gerade der

$$tg^2\psi = \frac{a^2-b^2}{b^2+c^2} =$$

$$tg^2\psi = \frac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{1+tg^2\beta} \quad \ldots (5')$$

$$\left(\cos\psi = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^{1)} \text{ ist.}$$

Es sind dies die beiden reellen Achsen, durch welche Minimal-Tangentialebenen, d. h. Tangentialebenen an die

Nullkugel $x^2+y^2+z^2=o$, (Nullkegel) . . . . (4)

auch Kanten des Kegels sind. Ihre Gleichungen ergeben sich durch Elimination

von y^2 aus (1) und (4).

gelegt werden können, welche auch Tangentialebenen des Kegels sind. Ihre Gl. sind der Gl. des Systemes konfokaler Kegel $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{-c^2+\lambda}=o$ für $\lambda=-b^2$ zu entnehmen.

Die dem Kegel (1) angehörigen Minimalstrahlen in H und H' / Minimalebenen durch f und f' bestimmen ein / eine Büschel / Schar von Kegeln, welches in jede / welche durch jeden beliebig durch den Kegelscheitel gelegte / gelegten Ebene $\mathfrak{S}$ / Strahl $\mathfrak{s}$ eine Involution von Strahlen / Ebenen hineinlegt. Die beiden Kanten / Tangentialebenen unseres Kegels (1) in $\mathfrak{S}$ / durch $\mathfrak{s}$ sind ebenso ein Paar (I) dieser Involution als (II) die beiden Spuren von H und H' in $\mathfrak{S}$ / Verbindungsebenen von f und f' mit $\mathfrak{s}$ und (III) die genannten Minimalstrahlen in $\mathfrak{S}$ / ebenen durch $\mathfrak{s}$; die mit Rücksicht auf das Paar (III) zu einander senkrechten Deckelemente dieser Involution werden von den Paaren I und II harmonisch getrennt. Sie sind das den Paaren I und II gemeinsame Paar von Winkelhalbierenden.

Erster Doppelsatz:

„In jede beliebige durch eine Kante k gelegte Ebene $\mathfrak{S}$ fällt eine weitere Kante k' des Kegels derart, daß das (Orthogonal)-Paar von winkelhalbierenden Geraden der beiden Kanten k und k' identisch

„Durch einen beliebigen in einer Tangentialebene K (vom Scheitel ausgehend) angenommenen Strahl $\mathfrak{s}$ geht noch eine weitere Tangentialebene K' des Kegels derart, daß das (Orthogonal)-Paar von

---

1) In einem sphärischen Dreiecke mit einer Seite / einem Winkel 90^0, mit dem dieser Seite / der diesem Winkel gegenüberliegenden Winkel $90^0+\beta$ / Seite (Hypotenuse) α und dem / der zweiten Winkel . . . $90^0-\alpha$ / Seite (der Kathete) β beträgt der / die dritte Winkel : $90^0-\varphi$. / Seite (andere Kathete): ψ.

ist mit dem Paare der winkelhalbierenden Geraden der beiden Spuren

$h = (\varkappa\,\mathfrak{S})$ und $h' = (\varkappa'\,\mathfrak{S})$

der zyklischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ in der Ebene $\mathfrak{S}$.“

winkelhalbierenden Ebenen der beiden Tangentialebenen K und K' identisch ist mit dem Paare der winkelhalbierenden Ebenen der Verbindungsebenen

$H = (f\mathfrak{s})$ und $H' = (f'\mathfrak{s})$

der Fokalachsen f und f' mit dem Strahle $\mathfrak{s}$.“

Bei der wirklichen (in dem Figuren 1 / 2 dargestellten kanten— / ebenen—weisen) Konstruktion der sphärischen Kegelspur braucht das in Rede stehende Paar von winkelhalbierenden Geraden / Ebenen keineswegs gezeichnet zu werden, sondern es genügt die gehörige Abtragung der (auch dem Vorzeichen nach) gleichen (in den Figuren schraffierten) Stücke (Bogen) $k\,h'$ und $h\,k'$ auf der durch k variablen / (Winkel) KH' und HK' bei dem auf K „ Ebene $\mathfrak{S}$ / Strahle $\mathfrak{s}$, um, wie es die

Figur 1.

zeigt, in jeder durch k gelegten Ebene $\mathfrak{S}$ die (ausser k noch in diese Ebene fallende) weitere Kante k' zu erhalten.

Figur 2.

zeigt, durch jeden in K (vom Scheitel ausgehend) angenommenen Strahl $\mathfrak{s}$ die weitere (ausser K noch durch diesen Strahl gehende) Tangentialebene K' zu erhalten.

Die Spurpunkte und Spuren von Geraden und Ebenen sind in beiden Figuren 1. und 2. durch dieselben Buchstaben bezeichnet, wie die betreffenden Gebilde selbst. Man stelle sich das Papierblatt dieser Figuren als Teil einer (sehr grossen) Kugelfläche vor.

Durch den Grenzübergang zu einer unendlich grossen Kugel erhielte man aus dem obigen die bekannte punktweise / tangentenweise Konstruktion eines ebenen Mittelpunktskegelschnittes aus

den beiden Asymptoten $\varkappa$, $\varkappa'$ und einem Punkte k.

den beiden Brennpunkten f, f' und einer Tangente K.

(Die Konstruktion der Tangente K' / des Berührungspunktes k' in jedem / jeder gefundenen Punkte k' / Tangentialebene K' würde sich beim gleichen Grenzübergange aus dem nun folgenden zweiten Doppelsatze ergeben.)

Zur Vervollständigung der angegebenen Konstruktion in dem Sinne, dass bei der gefundenen Kante k' / Tangentialebene K' auch die zugehörige Tangentialebene K' / Berührungskante k' angegeben werden soll, dient der leicht ableitbare z w e i t e Doppelsatz:

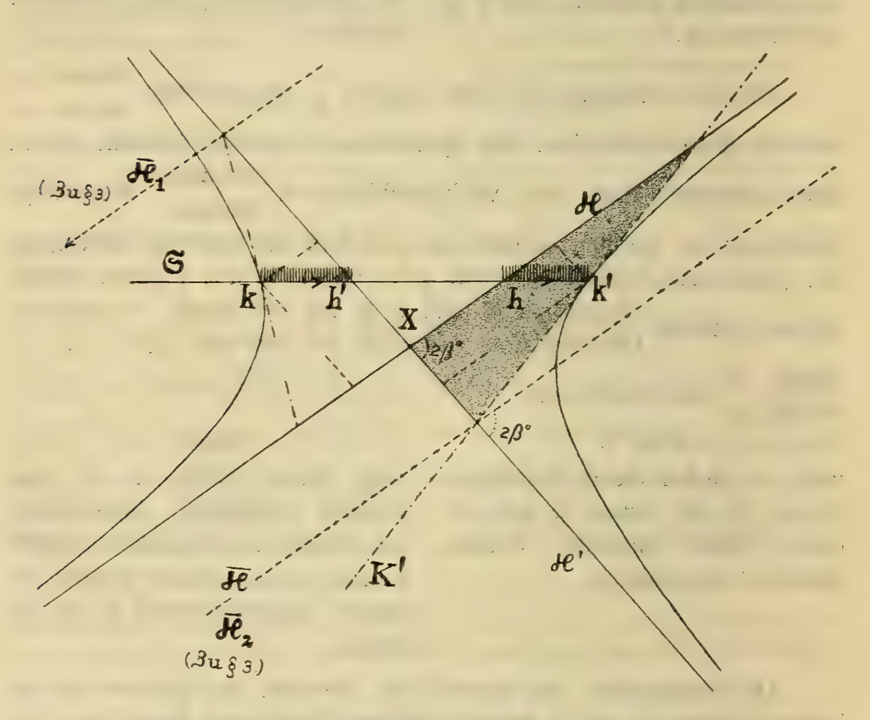


Fig. 1. Zur Konstruktion sphärischer Kegelschnitte.

(Fig. 1.) „Man spiegele (d. h. drehe um 180°) eine (beliebige) der beiden zyklischen Ebenen (etwa $\varkappa$) an k' und schneide das Spiegelbild $\bar{\varkappa}$ (die betreffende, um 180° um k' gedrehte, aus der einen zyklischen Ebene gewonnene Ebene) mit der anderen zyklischen Ebene; die Verbindungsebene dieser Schnittlinie mit k' ist d i e

(Fig. 2.) „Man spiegele eine (beliebige) der beiden Fokalachsen (etwa f) an K' und verbinde das Spiegelbild $\overline{f}$ mit der anderen Fokalachse durch eine Ebene. Letztere schneidet K' schon in der g e s u c h t e n B e r ü h r u n g s k a n t e k'."

gesuchte Tangentialebene K' ."

Im Hinblick auf die oben erwähnte Involution ergibt sich die Gleichheit der Winkel, welche

die Spuren der zyklischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ in einer beliebigen Tangentialebene des Kegels mit der Berührungskante des letzteren

die Verbindungsebenen einer beliebigen Kegelkante und je einer Fokalachse f, bzw. f' mit der Tangentialebene des Kegels längs dieser Kante

einschliessen, und hieraus mit Hilfe einer naheliegenden infinitesimalen Betrachtung der Satz

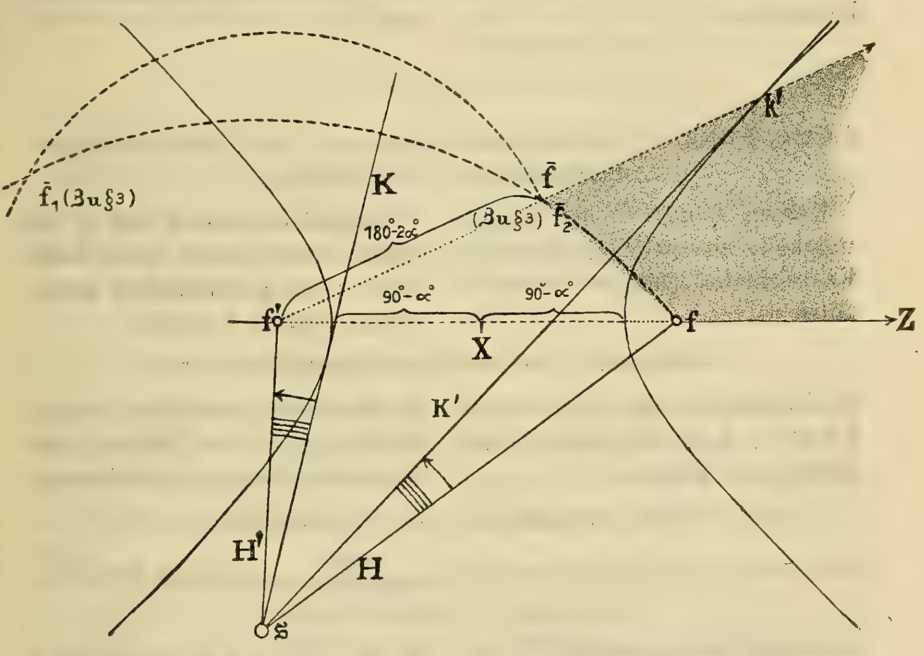


Fig. 2. Zur Konstruktion sphärischer Kegelschnitte.

über die Konstanz der Fläche desjenigen sphärischen Dreieckes, welches von einer beliebigen Tangentialebene des Kegels abgeschnitten wird auf dem sphärischen Zweiecke, das von den festen Kugelspuren der zyklischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ gebildet wird und so gewählt ist, dass die Kegelspur innerhalb desselben verläuft.

über die Konstanz des Umfanges desjenigen sphärischen Dreieckes, welches man durch Verbindung einer beliebigen Kegelkante mit zwei festen Kugelspurpunkten der Fokalachsen f und f' erhält, falls man diese so gewählt hat, dass man von einem dieser Spurpunkte zum anderen auf dem festen Basisbogen des Dreieckes so gelangen kann, dass die Kegelspur nicht

überschreiten wird. (Fadenkonstruktion der sphärischen Kegelschnitte nach Chasles.)

Weiter lässt sich folgern:

„Die Spiegelbilder $\bar{\varkappa}$ einer zyklischen Ebene $\varkappa$ bezüglich aller einzelnen Kanten des Kegels schliessen mit der anderen zyklischen Ebene stets denselben Winkel $2\,\beta$ (bzw. das Supplement hievon) ein.“

„Die Spiegelbilder $\bar{f}$ einer Fokalachse f bezüglich aller einzelnen Tangentialebenen des Kegels haben von der anderen Fokalachse stets denselben Winkelabstand $2\,\alpha$ (bzw. das Supplement hievon).“

§ 3.

Anwendung zu Konstruktionen auf der Zeichenkugel Bestimmung der beiden

Kanten k und k' des Kegels, welche in eine beliebig (durch den Kegelscheitel) gelegte Ebene $\mathfrak{S}$ fallen,

Tangentialebenen K und K' des Kegels, welche durch einen beliebigen (vom Kegelscheiteil ausgehenden) Strahl $\mathfrak{s}$ gehen,

vorausgesetzt, daß der Kegel gegeben ist durch

die Kugelspuren der zyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ des Kegels[1]) und irgend eine Kante.[2])

die Kugelspurpunkte der Fokalachsen f, f' des Kegels[1]) und irgend eine Tangentialebene.[2])

Man verschaffe sich zwei (Klein-)Kreise,

deren erster aus der letztgenannten Kante / Tangentialebene (nach dem Schlußsatze des vorigen § 2) sich ergibt als Ort

(Enveloppe) der Spiegelbilder $\bar{\varkappa}$ der zyklischen Ebene $\varkappa$ bezüglich aller Kanten (k, k' etc.) des Kegels. Dieser (Klein-) Kreis hat eine Orientierung, die bestimmt ist, sobald die Kugel-

der Spiegelbilder $\bar{f}$ der Fokalachse f, bezüglich aller Tangentialebenen (K, K' etc.) des Kegels. Dieser (Klein-) Kreis auf der Kugel ist mit seinem Gegenkreise auf der Kugel nicht zu verwechseln,

---

[1]) Fürs Endergebnis der hier folgenden Konstruktion ist es nicht von Belang, welche der beiden zyklischen Ebenen / Fokularachsen hier mit $\frac{\varkappa}{f}$ bezeichnet wird u. welche mit $\frac{\varkappa'}{f'}$.

[2]) Diese Kante / Tangentialebene ist in der Figur $\frac{1.}{2.}$ nicht besonders vermerkt.

spur der zyklischen Ebene $\varkappa$ irgendwie orientiert wird.[1])

[Die Figur 1 muß durch eine Darstellung auf einer kleineren Kugel ersetzt werden.

sobald f irgendewie orientiert, d. h. in der Figur 2 einer der beiden Kugelspurpunkte dieser Fokalachse allein verzeichnet wird, der andere aber nicht.[1])

Nun verschaffe man sich zum Zwecke der verlangten Konstruktion noch einen zweiten, ebenfalls

orientierten (Klein-) Kreis, jenen nämlich, welcher entsteht, wenn man die wie oben orientierte Ebenenspur $\varkappa$ um (die beliebig angenommene Ebene $\mathfrak{S}$, d. h. um) den zu $\mathfrak{S}$ senkrechten Strahl dreht

nicht mit seinem Gegenkreise (auf der Kugel) zu verwechselnden (Klein-) Kreis, jenen nämlich, welcher entsteht, wenn man den oben bevorzugten Spurpunkt der Achse f um den (beliebig angenommenen) Strahl $\mathfrak{s}$ dreht.

Diese beiden (Klein-) Kreise bestimmen,

da beide orientiert sind, nur zwei orientierte, ihnen gemeinsame größte Tangentialkreise $\bar{\varkappa}_1$ und $\bar{\varkappa}_2$.[2]) Die gesuchten Kanten k und k' in $\mathfrak{S}$

da sie nicht mit ihren Gegenkreisen zu verwechseln sind, nur zwei nicht mit ihren Gegenpolen zu verwechselnde Schnittpunkte $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$.[2]) Die gesuchten Tangentialebenen K und K' durch $\mathfrak{s}$

sind nun einfach konstruierbar als die

Symmetrieachsen (Umwendungsachsen) des orientierten Paares größter Kreise $\varkappa$ und $\bar{\varkappa}_1$ einerseits, und des Paares $\varkappa$ und $\bar{\varkappa}_2$ andererseits;

Symmetrieebenen der gezeichneten einfachen Kugelpunkte f und $\bar{f}_1$ einerseits und des Spurpunktpaares f und $\bar{f}_2$ andererseits;

diese letzteren sind offenbar identisch mit je einer[3])

---

[1]) Dieser (Klein-) Kreis wird zum Nullkreise $\mathfrak{s}$ (und deshalb die Orientierung gleichgültig) bei den Pappus-Kegeln: e) im § 4.

Dieser (Klein-) Kreis wird zum größten Kreise S und deshalb eine Verwechslung mit dem Gegenkreise bedeutungslos) bei den Hachette-Kegeln: f) im § 4.

[2]) Vgl. die 2. Fußnote im § 1.

[3]) Die jeweilig andere (zur vorigen senkrechte) Symmetrie $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{-achse}}{\text{-ebene}}$ ist weiter für unsere Konstruktion nicht von Bedeutung; deshalb ist bei der Konstruktion nach dem nun oben folgenden $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Spuren-}}{\text{Verbindungsebenen-}}$ Satze Vorsicht anzuwenden: Welche von den beiden oben sogleich zu erwähnenden $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Symmetrieachsen des}}{\text{Symmetrieebenen des}}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Strahlenwinkels}}{\text{Ebenenwinkels}}$ zu wählen ist, geht aus dem früheren hervor; es ist jene

Symmetrieachse des Strahlenwinkels, welcher in der Ebene $\mathfrak{S}$ gebildet wird von den Spuren der Ebenen $\varkappa$ und $\overline{\varkappa_1}$ einerseits $\varkappa$ und $\overline{\varkappa_2}$ andererseits. (Spurensatz für eine beliebig durch den Kegelscheitel gelegte Ebene $\mathfrak{S}$.)

Symmetrieebene des Ebenenwinkels, welcher gebildet wird von den Verbindungsebenen des Strahles $\mathfrak{s}$ mit den Achsen f und $\overline{f_1}$ einerseits, f und $\overline{f_2}$ andererseits. (Verbindungsebenensatz für einen beliebig durch den Kegelscheitel gelegten Strahl $\mathfrak{s}$).

II. Die (für die Einteilung aller Kreiskegel) wichtigsten besonderen Formentypen von Kreiskegeln.

§ 4.

Die speziellen Kegeltypen zweiter Ordnung, welche Reye[1]) hervorhebt, sind sämtlich gekennzeichnet durch gewisse Beziehungen der Kegelspur in der unendlich-fernen Ebene zum absoluten Kugelkreis. Kegel dieser speziellen Typen trifft man bei vielen geometrischen (auch mechanischen und physikalischen) Untersuchungen an.

Wir beabsichtigen nicht, zu den von Reye hervorgehobenen Typen hier noch neue hinzuzufügen, sondern wollen die von ihm aufgestellten eingehend kennen lernen.[2])

Wir ordnen diese Typen zu Paaren, indem wir jene Typen neben einander stellen, welche sich bei der Polarisation am Nullkegel (4) mit einander vertauschen. Die Achsenbezeichnung x, y, z des Kegels belassen wir hiebei stets so, daß $a^2 > b^2$, $tg^2\alpha > tg^2\beta$ bleibt, daß also die reellen zyklischen Ebenen durch die x Achse gehen und die reellen Fokalachsen in der xz Ebene liegen, damit wir immer direkt die obigen Gleichungen (3′) und (5′) benützen können.

Reyes Buchstabenbezeichnung a) b) ... g) h) für jeden hervorzuhebenden Kegeltypus behalten wir bei und fügen bei jedem Typus die für ihn charakteristische Gleichung zwischen den Verhältnissen $a^2 : b^2 : c^2$ oder, was auf dasselbe

---

Symmetrieachse, welche auch in der Symmetrieebene des Paares von orientierten Spurkreisen $\varkappa$ und $\overline{\varkappa_1}$, bzw. $\varkappa$ und $\overline{\varkappa_2}$ liegt.

Symmetrieebene, welche auch durch die Symmetrieachse des orientierten Strahlenpaares f und $\overline{f_1}$, bzw. f und $\overline{f_2}$ hindurchgeht.

[1]) Geometrie der Lage, I. Band, Seite 219 No. 163.

[2]) Nur einen einzigen weiteren Typus, der zu den in diesem § 4 behandelten (Büschel- und Schar-)Typen Reyes nicht gehört, können wir später dennoch nicht unerwähnt lassen. Es ist dies der Typus der zu ihren absoluten Polarkegeln kongruenten Kegel, für welche die Beziehung $tg^2\alpha \,.\, tg^2\beta = 1$, d. h. $\alpha + \beta = 90^0$ charakteristisch ist. Vgl. § 8.

hinauskommt, zwischen $tg^2\alpha \left(=\frac{a^2}{c^2}\right)$ und $tg^2\beta \left(=\frac{b^2}{c^2}\right)$ hinzu. Letztere erweist sich bei allen anzuführenden acht Typen als

linear

entweder — und diese Typen setzen wir in die linke Spalte der folgenden Tabelle — in den Koeffizienten der in Punkt-

oder — und diese Typen setzen wir in die rechte Spalte der folgenden Tabelle — in den Koeffizienten der in Ebenen-

Koordinaten geschriebenen Kegelgleichung. (Linear in beiden zugleich ist die charakteristische Gleichung nur bei den in der Tabelle folgenden Typen e und f.) Jeder Kegel eines Typus in der linken Spalte der folgenden Tabelle gehört einem Büschel und jeder Kegel eines Typus in der rechten Spalte der folgenden Tabelle gehört einer Schar von Kegeln mit den gleichen Symmetrieebenen an, welche sämtlich denselben Typus besitzen, so daß wir Büscheltypen — in der linken Spalte — und Schartypen — in der rechten Spalte — unterscheiden können.

In dieser Einteilung ist es begründet, daß wir — [entgegen der alphabetischen Ordnung der von uns beibehaltenen Buchstabenzeichen *a*) . . . *g*) *h*) Reye's] — den Typus *h*) in die linke, den Typus *g*) dagegen in die rechte Spalte aufnehmen.

[Die Typen *e*) und *f*) sind zugleich Büschel- und Schar-typen, wobei ein Teil dieser „Büchsel-Schar" zu *e*), ein anderer zu *f*) gehört.] Warum in der folgenden Tabelle *e*) vor *c*) und *f*) vor *d*) gestellt wurde, wird später aus der Figur 3 und der Schlußtabelle des § 12 klar, wo *a e c h* und *b f d q* gerade in dieser Reihenfolge auftreten.

Reye's besondere Kegeltypen bilden:

a) Die gleichseitigen Kegel **Schröters.** Ihre Kanten können durch Bewegung aus den drei Kanten eines rechtwinkelig-bleibenden Trieders erzeugt werden. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=o,$ $cotg^2\alpha + cotg^2\beta = 1$	*b*) Die Kegel **Monges.** Ihre Tangentialebenen können durch Bewegung aus den drei Seitenflächen eines rechtwinkelig-bleibenden Trieders erzeugt werden. $a^2+b^2-c^2=o,$ $tg^2\alpha + tg^2\beta = 1$
e) Die Kegel des **Pappus.** Ihre Neben-scheitelkanten stehen zu einander senkrecht. (Ihre Hauptscheitelkanten schließen mit der inneren Kegelachse z einen Winkel ein, welcher $\geqq 45^0$ ist.) $b^2=c^2\leqq a^2$; $tg^2\beta = 1 \leqq tg^2\alpha$	*f*) Die Kegel **Hachettes.** Ihre Haupt-scheitelkanten stehen zu einander senkrecht. (Ihre Neben-scheitelkanten schließen mit der inneren Kegelachse z einen Winkel ein, welcher $\leqq 45^0$ ist.) $c^2=a^2\geqq b^2$, $1 = tg^2\alpha \geqq tg^2\beta$

c) Die **orthogonalen** Kegel. Ihre zyklischen Ebenen sind orthogonal zu je einer (Nebenscheitel-)Kante des Kegels. $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=o$, $cotg^2\beta - cotg^2\alpha = 1$	*d*) Die Kegel **Reyes**. Ihre Fokalachsen stehen senkrecht zu je einer (entlang einer Hauptscheitel-kante berührenden) Tangentialebene des Kegels. $a^2 - b^2 - c^2 = o,$ $tg^2\alpha - tg^2\beta = 1$
h) Die **orthozyklischen** Kegel. Ihre zyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ sind orthogonal zu einander. ($\varphi = 45^0$). $\frac{2}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=o$, $cotg^2\beta - 2cotg^2\alpha = 1$	*g*) Die **orthofokalen** Kegel, Ihre Fokalachsen f, f' sind orthogonal zu einander. ($\psi = 45^0$). $a^2 - 2b^2 - c^2 = o,$ $tg^2\alpha - 2tg^2\beta = 1$
a) Die gleichseitigen Kegel **Schröters**[1]) sind solche, denen (dreifach-) rechtwinkelige Dreikante (Trieder) eingeschrieben werden können.	*b*) Die Kegel **Monges**[2]) sind solche, denen (dreifach-) rechtwinkelige Trieder (Dreikante) umschrieben werden können.

Man drückt diese apolare Beziehung[3]) der unendlich fernen Kegelspur S zum absoluten Kugelkreise S' so aus:

---

[1]) Solche Kegel treten in den Knotenpunkten von Potenzialflächen als Tangentenkegel auf.

[2]) Beim Hyperboloide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ist man gewohnt, die zugehörige Kugel

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$, welche die Scheitel aller dem Hyperboloide umschriebenen (dreifach-) rechtwinkeligen Trieder enthält, als Kugel Monges zu bezeichnen. Will man über einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel als Basis einen Kegel des Typus (*b*) erzeugen, so fasse man den gegebenen Kegelschnitt als Grenzgestalt eines Hyperboloides auf und hat dann den Scheitel des Kegels auf der zugehörigen Kugel Monges anzunehmen. Deshalb wollen wir auch die Kegel des Typus (*b*) unter dem Namen „Kegel Monges" zusammenfassen.

[3]) Vgl. etwa Grace and Young, The Algebra of Invariants, Cambridge 1903. S. 299.

S ist dem S' harmonisch eingeschrieben.
(S' ist dem S harmonisch umschrieben.)

S ist dem S' harmonisch umschrieben.
(S' ist dem S harmonisch eingeschrieben.)

Die hiefür charakteristische Beziehung zwischen den Koeffizienten der Kegelgleichung (1) bzw. (1′) lautet:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = o^{1)}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = o^{1)}$$

bzw. bezüglich der Halbachsen des zugehörigen sphärischen Kegelschnittes (Gl. 2)

$$cotg^2\alpha + cot^2\beta = 1.$$

$$tg^2\alpha + tg^2\beta = 1.$$

Aus dieser „charakteristischen" Gleichung folgt, daß

die Kegelgleichung (1′) oder hier

$$x^2 \, cotg^2\,\alpha + y^2\,(1 - cotg^2\,\alpha) - z^2 = 0,$$
$$(y^2 - z^2) + (x^2 - y^2)\; cotg^2\,\alpha = 0$$

unabhängig von α, also für jede der ∞^1 Formen von unserem Typus (a) erfüllt wird, wenn

$y^2 - z^2 = 0$ und zugleich $x^2 - y^2 = 0$ ist.

„Jeder (gleichseitige) Kegel Schröters geht durch die vier bezüglich seiner Symmetrieachsen festen Strahlen, welche (vom Kegelscheitel ausgehen und) gleiche Winkel (α^*) mit den Symmetrieachsen x, y, z bilden

die Kegelspur in der Ebene $z = 1$

$$\left(\text{die Ellipse } \frac{x^2}{tg^2\,\alpha} + \frac{y^2}{1 - tg^2\,\alpha} = 1,\right)$$

die Gerade $x + y = 1$ (und daher auch jede der drei andern, zur letztern bezüglich der Ellipsenachsen symmetrischen Geraden) berührt; denn wirklich verschwindet die Diskriminante der in x quadratischen Gleichung, welche sich durch Substitution von $y = 1 - x$ in die Ellipsengleichung ergibt, nämlich der Gleichung

$$x^2 - 2\,x\,tg^2\,\alpha + tg^4\,\alpha = 0.$$

„Jeder Kegel Monges berührt die vier bezüglich seiner Symmetrieebenen festen Ebenen (durch den Kegelscheitel), welche gleiche Winkel (α^*) mit den Symmetriebenen $x = o$, $y = o$, $z = o$ des Kegels bilden

---

1) Will man an der Ungleichung $a^2 \gtreqqless b^2$ oder $tg^2\alpha \gtreqqless tg^2\beta$ festhalten (welche die Übersicht der Realitätsverhältnisse erleichtert) und setzt man — gemäß der absoluten Polarität zu einer Kegelform vom Typus der Nachbarspalte — entweder rechts oder links vom obigen Vertikalstrich $a^2 = \frac{1}{b'^2}$, $b^2 = \frac{1}{a'^2}$, $c^2 = \frac{1}{c'^2} (= 1)$ ein, damit wiederum $a'^2 \gtreqqless b'^2$ oder $tg^2\alpha' \gtreqqless tg^2\beta'$ wird, so geht aus der charakteristischen Beziehung der linken (rechten) Spalte jene der rechten (linken) Spalte durch diese Substitution hervor, falls man noch nachträglich die Akzente wieder fortläßt.

$$(3\cos^2\alpha^* = 1,\ tg^2\alpha^* = 2),$$

also parallel sind zu den Diagonalen eines Würfels, dessen Kanten die Richtungen der Symmetrieachsen $x\,y\,z$ haben."

also parallel sind zu den Flächen eines regulären Oktaeders, dessen Diagonalebenen die Stellung der Symmetrieebenen des Kegels haben."

Hieher gehört auch ein Umdrehungskegel[1])

a) Schröters $(tg^2\alpha = tg^2\beta = 2)$ $(\alpha = \beta = \alpha^*)$.

b) Monges $\left(tg^2\alpha = tg^2\beta = \frac{1}{2}\right)$ $(\alpha = \beta = \beta^* = 90^0 - \alpha^*)$.

e) $b^2 = c^2\ (\leqq a^2)$[2])
$tg^2\beta = 1\ (\leqq tg^2\alpha)$
Kegel des Pappus.

f) $a^2 = c^2\ (\geqq b^2)$[2])
$tg^2\alpha = 1\ (\geqq tg^2\beta)$
Kegel des Hachette.

Schneidet eine der beiden durch die innere Kegelachse z gelegten Symmetrieebenen des Kegels denselben in einem rechtwinkeligen Kantenpaare, so ist der Kegel ein solcher des Pappus $(tg^2\alpha \geqq 1)$ oder Hachette $(tg^2\beta \leqq 1)$, je nachdem in die andere durch z gelegte Symmetrieebene Kanten fallen, welche um mehr oder weniger als 45^0 von z abstehen.

Der sogenannte „mittlere" Umdrehungskegel mit dem halben Öffnungswinkel 45^0 (Kegel ef der Tabelle des § 6) ist ein Kegel des Pappus und zugleich des Hachette. Er ist der einzige Kegel mit dieser Eigenschaft, auch der einzige reelle Kegel, der zu sich selbst[3]) absolut polar ist, d. h. dessen Tangentialebenen und Kanten einander als paarweise senkrecht zugeordnet werden können.

Halten wir die Symmetrieachsen $x\ y\ z$ fest, so bilden die Kegel des Pappus $(b^2 = c^2 < a^2)$ | Hachette $(a^2 = c^2 > b^2)$ einen Teil des linearen Systemes — dieses System ist zugleich Büschel und Schar — jener Kegel, welche die Ebenen $y^2 = z^2$ | $x^2 = z^2$ längs ihren Schnittgeraden mit der Ebene $x = o$ | $y = o$ berühren.[4])

---

[1]) Vgl. im § 7.

[2]) Vgl. die Bemerkung im kleinen Druck unmittelbar vor der Tabelle in diesem § 4.

[3]) Zu einem mit ihm selbst kongruenten Kegel ist jeder Kegel absolut polar, bei welchem $tg^2\alpha \cdot tg^2\beta = 1$, $\alpha + \beta = 90^0$ ist. Vgl. die zweite Fußnote beim § 4, und den § 8.

[4]) Der andere Teil dieses Systemes wird gebildet von Kegeln des Hachette. | Pappus.

Wendet man den am Schlusse des § 3 von uns angegebenen

Spurensatz für eine beliebige durch den Polstrahl einer zyklischen Ebene $\varkappa$ gelegte Ebene $\mathfrak{S}$

Verbindungsebenen-satz für einen beliebigen Strahl $\mathfrak{s}$ der Polarebene einer Fokalachse f

an, so ergibt sich eine bemerkenswerte Konstruktion der

Kanten eines (jeden) Kegels des P a p p u s:

Tangentialebenen eines (jeden) Kegels des H a c h e t t e:

Es sei der Polstrahl der einen zyklischen Ebene eines solchen Kegels, etwa von $\varkappa$, mit s bezeichnet. (Man überzeugt sich leicht,[1]) daß hier s zur anderen zyklischen Ebene, $\varkappa'$, senkrecht steht.) Die Kanten des Kegels in jeder durch s gelegten Ebene $\mathfrak{S}$

Es sei die Polarebene der einen Fokalachse eines solchen Kegels, etwa von f, mit S bezeichnet. (Man überzeugt sich leicht,[2]) daß hier S zu anderen Fokalachse, f', senkrecht steht.) Die Tangentialebenen des Kegels durch jeden in S (und durch den Kegelscheitel) gelegten Strahl $\mathfrak{s}$

sind nun konstruierbar als die beiden zu einander s e n k r e c h t e n

Geraden in $\mathfrak{S}$,

Ebenen durch $\mathfrak{s}$,

welche die (beiden supplementären) Winkel der

S p u r der zyklischen Ebene $\varkappa$ in $\mathfrak{S}$ mit dem festen Strahle s

V e r b i n d u n g s e b e n e von $\mathfrak{s}$ und f mit der festen Ebene S

halbieren.

„Ist s ein fester Strahl und $\varkappa$ eine feste (nicht zu s parallele) Ebene, und legt man durch s eine variable Ebene $\mathfrak{S}$, deren Spur in $\varkappa$ jedesmal bestimmt wird, dann erfüllen die Winkelsymmetralen dieser Spur ($\varkappa\ \mathfrak{S}$) einerseits und des festen Strahles s andererseits einen Kegel des Pappus."

„Ist S eine feste Ebene und f ein fester (nicht zu S paralleler) Strahl, und nimmt man in S einen variablen f schneidenden Strahl $\mathfrak{s}$, den man jedesmal mit f verbindet, dann umhüllen die winkelhalbierenden Ebenen dieser Verbindungsebene ($f\ \mathfrak{s}$) einerseits und der festen Ebene S andererseits einen Kegel des Hachette."

---

[1]) Die zyklische Ebene $\varkappa$ und ihr Polstrahl s werden von den beiden hier zu einander s e n k r e c h t e n Nebenscheitelkanten harmonisch getrennt. s gibt den Nullkreis der Fußnote [3]) im § 3.

[2]) Die Fokalachse f und ihre Polarebene S werden von den beiden hier zu einander s e n k r e c h t e n Hauptscheitelkanten harmonisch getrennt. S gibt den größten Kreis der Fußnote [3]) im § 3.

$\varkappa$ ist die eine, die zu s senkrechte Ebene $\varkappa'$ durch den Kegelscheitel ($\varkappa$ s) die andere zyklische Ebene des so erzeugten Kegels.

„Die Kegel des Pappus werden von den Ebenen zweier Geraden — (nämlich der beiden Polstrahlen der zyklischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$) — in je zwei normalen Strahlen geschnitten."

f ist die eine, die zu S senkrechte Gerade f' durch den Kegelscheitel (f S) die andere Fokalachse des so erzeugten Kegels.

„An die Kegel des Hachette gehen von den Strahlen zweier Ebenen — (nämlich der beiden Polarebenen der Fokalachsen f und f') — je zwei normale Berührungsebenen."

c) Die orthogonalen Kegel, deren zyklische Ebenen zu je einer von zwei Kegelkanten ($x = o$, $\frac{y}{z} = \pm \frac{b}{c}$, Nebenscheitelkanten) normal sind.[1])

Verwendet man dieses Kantenpaar als Achsen zweier projektiver Ebenenbüschel zur Erzeugung der Kanten des Kegels, so entsprechen einander jene Ebenen der beiden Büschel, welche zu einander senkrecht stehen.[3])

d) Die Kegel Reyes, deren Fokalachsen zu je einer von zwei Berührungsebenen $\left(\frac{x}{z} = \pm \frac{a}{c}\right.$, welche längs der Hauptscheitelkanten berühren) normal sind.[2])

Verwendet man dieses Paar von Tangentialebenen als Trägerebenen projektiver Strahlenbüschel zur Erzeugung der Tangentialebenen des Kegels, so entsprechen einander jene Strahlen der beiden Büschel, welche zu einander senkrecht stehen.[3])

---

[1]) Vgl. Schröters Abhandlung in Crelles Journal 85. Alle Formen der Orthogonalkegel kann man erhalten, wenn man z. B. einen Kreis projiziert aus rgend einem Punkte des Lotes zur Kreisebene, welches durch einen Punkt dieses Kreises geht.

[Solche Kegel treten z. B. auf als Komplexkegel beim quadratischen Komplexe der Translationsstrahlen einer Elementarbewegung eines starren Körpers.]

[2]) Alle Formen dieser Kegel Reyes kann man erhalten, wenn man z. B. eine Parabel aus einem beliebigen Punkte des Lotes projiziert, welches durch den Brennpunkt der Parabel zu ihrer Ebene errichtet wird.

[Zu den Kegeln dieser Kategorie Reyes gehören z. B. jene Kegel zweiter Ordnung, welche einem Plücker-schen Zylindroide $z = \frac{2\mathfrak{h}\,x\,y}{x^2 + y^2}$ umschrieben werden können, wenn man den Scheitel des Kegels beliebig auf dieser Fläche annimmt.]

Man verfolge auf der Zeichenkugel:

[3]) Ist k eine Nebenscheitelkante und $\varkappa$ die zu ihr nicht senkrechte zyklische Ebene, so fällt in jede Ebene V durch k eine weitere Kegelkante, die zur Spur von $\varkappa$ in V senkrecht steht. (Kon-

Ist K die Tangentialebene entlang einer Hauptscheitelkante und f die zu ihr nicht senkrechte Fokalachse, so geht durch jeden (f schneidenden) Strahl v von K eine weitere Tangentialebene,

Die Orthogonalkegel sind auch projektiv-erzeugbar durch kongruente Ebenenbüschel, deren reelle Achsen auf dem Kegel beliebig, aber symmetrisch zu einander liegen bezüglich der Ebene der Neben-scheitelkanten.

Aus $tg^2\beta \,.\, tg^2\varphi = 1$ (vgl. Gl. 2 und 3′) folgt für die Orthogonalkegel

$$\frac{b^4}{c^4} \cdot \frac{a^2+c^2}{a^2-b^2} = 1$$

oder (wegen $b^2 + c^2 \neq o$)

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = o$$

oder (vgl. Gl. 2)

$$cotg^2\beta - cotg^2\alpha = 1$$
$$(sin^2\alpha = tg^2\beta)$$

Die Kegel Reyes sind auch projektiv-erzeugbar durch kongruente Strahlenbüschel, deren reelle Ebenen beliebige, aber bezüglich der Ebene der Haupt-scheitelkanten zu einander symmetrische Tangentialebenen des Kegels sind.

Aus $tg^2\alpha \,.\, tg^2\psi = 1$ (vgl. Gl. 2 und 5′) folgt für diese Kegel Reyes

$$\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{b^2+c^2} = 1$$

oder (wegen $a^2 + c^2 \neq o$)

$$a^2 - b^2 - c^2 = o \text{ [1]}$$

oder (vgl. Gl. 2)

$$tg^2\alpha - tg^2\beta = 1$$
$$(cotg^2\alpha = cos^2\beta)$$

als charakteristische Gleichung.

Diese besagt, daß jeder solche Kegel zwei für den Typus charakteristische Paare von konjugiert-komplexen, mit den Symmetrie-achsen und -ebenen starr verbundenen

Kanten besitzt.

Es sind dies jene Strahlen der beiden reellen Ebenen $z = \pm y$, welche sich auf die xy Ebene in die Kreispunktsstrahlen $(x^2 + y^2 = o)$ der letzteren projizieren.

[Die Gl. (1′) oder $x^2 cotg^2\alpha + y^2 cotg^2\beta = 1$ nimmt bei unserem Typus wegen $cotg^2\beta = 1 + cotg^2\alpha$ die Gestalt an: $(x^2 + y^2)\ cotg^2\alpha + (y^2 - z^2) = o$; sie wird also unabhängig von α erfüllt, wenn zugleich $x^2 + y^2 = o$ und $y^2 - z^2 = o$ ist.]

Tangentialebenen hat.

Es sind dies jene Ebenen, welche die beiden reellen (in der xz Ebene unter $+45^0$ gegen die z Achse gelegten) Geraden $y = o$, $z = \pm x$ mit den Kreispunkten $(x^2 + y^2 = o,\ z = o)$ der xy Ebene verbinden.

Will man wiederum den Übergang zu Ebenenkoordinaten vermeiden, so genügt es zum Beweise des Gesagten, in jeder Ebene $z =$ konst. die Spurpunkte der genannten reellen Geraden als Brennpunkte der Kegelspur in dieser Ebene zu erkennen.]

---

struktion der sphärischen Kegelspur eines Orthogonalkegels als „Normal-Konchoide“ eines größten Kreises *.)

die zur Ebene $(v\ f)$ senkrecht steht. (Konstruktion der sphärischen Kegelspur solchen Reye-Kegels als „negative Fußpunktskurve“ eines größten Kugelkreises bezüglich des Kugelspurpunktes einer Fokalachse f als Pol.)

[1]) Vgl. die Fußnote auf der Seite 13.

Jeder Kegel des durch diese zwei Paare von imaginären Kanten bestimmten Büschels von Kegeln ist ein Orthogonalkegel.

h) Die orthozyklischen Kegel, d. h. solche, bei denen die beiden reellen zyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ zu einander senkrecht stehen.

Aus $tg^2\varphi = 1$ ergibt sich (Gl. 3′)

$$\frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} = 1,$$

$$\frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = o \text{ oder}$$

$$cotg^2\beta - 2\ cotg^2\alpha = 1$$

Jeder Kegel der durch diese zwei Paare von imaginären Tangentialebenen bestimmten Schar von Kegeln ist ein Kegel dieser Kategorie Reyes.

g) Die orthofokalen Kegel d. h. jene, deren reelle Fokalachsen f, f' zu einander senkrecht stehen.

Aus $tg^2\psi = 1$ ergibt sich (Gl. 5′)

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2} = 1,$$

$$a^2 - 2b^2 - c^2 = o$$ [1]) oder

$$tg^2\alpha - 2\,tg^2\beta = 1$$

als charakteristische Gleichung der Kegel dieses Typus.

Die zyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ sind

$$z = \pm y;$$

ihre Minimalstrahlen bestimmen ein Büschel von orthozyklischen Kegeln.

Die Fokalachsen f f' sind

$$y = o, \quad z = \pm x;$$

die durch sie gelegten Minimalebenen bestimmen eine Schar von Orthofokal-Kegeln.

§ 5.

Der Ort der Scheitel aller **Kegel** der betrachteten speziellen Typen **über einem festen Kreise** $\mathfrak{K}$ als Basis. Die Formen charakteristischer Dreiecke bei Kegeln dieser Typen.

Wir bringen nun die Lösung der Aufgabe:

„Zu einem gegebenen festen Kreise $\mathfrak{K}$ als Basis eines Kegels ist der Ort der Scheitel P anzugeben, wenn verlangt wird, daß der Kegel $P(\mathfrak{K})$ einem bestimmten der (von uns im Anschlusse an Reye so bezeichneten) Typen *a*, *b*, u. s. w. bis *h* angehöre“.

Es ist gebräuchlich, bei einem Kreiskegel dasjenige Dreieck als sein (durch seine Form) „charakteristisches“ zu bezeichnen, welches von den Neben-Scheitelkanten (vgl. § 1, unmittelbar vor Gl. 2) und der Spur der sie verbindenen Symmetrieebene des Kegels in der Ebene des Basiskreises gebildet wird, oder mit anderen Worten:

dasjenige, welches den Scheitel P des Kegels mit den Endpunkten F_1, F_2 jenes Durchmessers des Basiskreises $\mathfrak{K}$ – (mit dem

[1]) Vgl. die Fußnote auf der Seite 13.

Mittelpunkte O und dem Radius r) — verbindet, auf welchen sich die Gerade PO orthogonal zur Ebene des Basiskreises projiziert.

Die Basis $F_1 F_2$ des charakteristischen Dreieckes $PF_1 F_2$ hat die Länge $2\,r$, die beiden anderen Seiten $PF_1 = r_1$ und $PF_2 = r_2$ fallen auf die Neben- Scheitelkanten des Kegels, woraus die Größe des Winkels bei P als

$$\sphericalangle\, F_1 PF_2 = 2\,\beta \qquad \text{(bzl. } \beta \text{ vgl. Gl. 2 im § 1) folgt.}$$

Nun können wir unsere Aufgabe auch so aussprechen:

„Für jeden der Typen von Kegeln (a, b, ... u. s. w. bis h) sind alle Formen der zu den Kegeln dieses Typus gehörigen charakteristischen Dreiecke anzugeben.“

Die Lösungen stellen wir in einer Tabelle zusammen und illustrieren sie durch die Figur 3. Zwei zu einander senkrechte Durchmesser des fest zu denkenden Kreises $\mathfrak{K}$ wählen wir als ξ und ζ Achse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems ξ, η, ζ, wodurch auch die Lage der Achse η bestimmt ist: η fällt auf die Achse des Kreises $\mathfrak{K}$.[1]) Unsere Zeichenebene legen wir in die $\xi\,\eta$ Ebene, so daß der Kreis $\mathfrak{K}\,(\eta = o,\ \xi^2 + \zeta^2 = r^2)$ unsere Zeichenebene (zu welcher die Kreisebene senkrecht steht) in den beiden (auf ihm diametral gegenüberliegenden) Punkten F_1 und F_2 $(\pm r,\ o,\ o)$ durchsetzt.

Der Ort des Kegelscheitels P ist nun für jeden Kegeltypus eine bestimmte Umdrehungsfläche um die η Achse, deren in die Meridianebene $\xi\,\eta$ fallende Meridiankurve wir in der folgenden Tabelle angeben und in der Figur 3 verzeichnen. Wir erhalten so eine Übersicht der besonderen Kegeltypen.

Aus der letzteren kann man dann bequem alle Formen charakteristischer Dreiecke der zu einem bestimmten Typus (a, b, . . . bis h) gehörigen Kegel entnehmen: Wenn man den Kreis $\mathfrak{K}$ aus irgend einem Punkte P der zu diesem Typus gehörigen Meridiankurve projiziert, hat man einen Kegel des verlangten Typus mit dem charakteristischen Dreiecke $F_1 F_2 P$.

Die Beweise der in der Tabelle aufgestellten Behauptungen werden wir ihr folgen lassen.

Die Schnittpunkte der Meridiankurven (a) (b) . . . (h) unter einander bestimmen die Scheitel P solcher höher-spezieller Kugel, welche zugleich zweien von den betrachteten Typen angehören und von denen im nächsten § 6 die Rede sein wird. In der Tabelle des § 6 sind auch die berechneten Koordi-

[1]) Die „Achse“ eines Kreises ist das Lot zur Kreisebene durch den Kreis-Mittelpunkt.

naten ξ, η dieser speziellen Punkte P angegeben,[1]) welche nach dem obigen die beiden Abstände bedeuten, die der Scheitel eines solchen Kegels von der Achse und von der Ebene eines auf ihm gelegenen Kreises vom Radius r besitzt. Diese Koordinaten wurden schon bei der Konstruktion der Figur 3 benützt, um ihre Genauigkeit zu erhöhen.

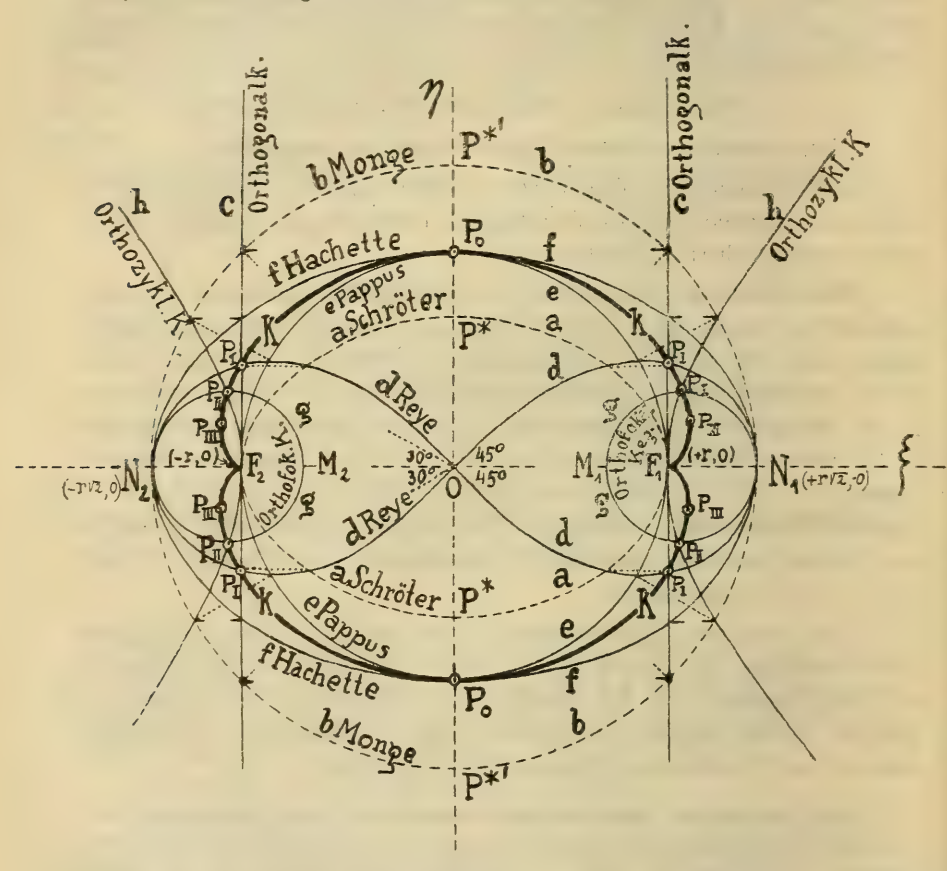


Fig. 3. Meridiankurven charakteristischer Drehflächen für die Kegeltypen Reyes nebst der (für die „mittleren" Kegel charakteristischen) Koffeide k.

Tabelle zur Figur 3. (Vgl. die Tabelle des vorigen § 4.)

Bei einem festen Kreise $\mathfrak{K}$ ($\eta = 0$, $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$) als Kegelbasis ergibt sich folgende Meridiankurve als Ort der in der Zeichenebene ($\xi\,\eta$) gelegenen Scheitel P der Kegel des betreffenden Typus:

[1]) Diese Tabelle ist aus technischen Gründen ganz am Schlusse dieser Abhandlung angefügt worden.

a) Bei den gleichseit. Kegeln **Schröters** (denen rechtwinkelige Dreikante eingeschrieben werden können): die Ellipse

$$a(\xi, \eta) = \xi^2 + 2\eta^2 - r^2 = o$$

mit der Hauptscheiteln F_1, F_2 $(\pm r, o)$ und den Brennpunkten $(\pm \frac{1}{2} r \sqrt{2}, o)$.

b) Bei den Kegeln **Monges** (denen rechtwinkelige Trieder umschrieben werden können): der Kreis

$$b(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 - 2r^2 = o$$

in welchem die zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Mongesche Kugel[1]) die $\xi\,\eta$ Ebene durchsetzt. Sein Radius ist $r\sqrt{2}$, sein Mittelpunkt der Mittelpunkt O von $\mathfrak{K}$.

e) Bei den Kegeln des **Pappus** (die als Ort der winkelhalbierenden Geraden eines festen und eines in einem Büschel beweglichen Strahles konstruierbar sind): der Kreis

$$e(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 - r^2 = o$$

über den Durchmesser $F_1 F_2$.

f) Bei den Kegeln des **Hachette** (die als Ort der winkelhalbierenden Ebenen einer festen und einer in einem Büschel beweglichen Ebene konstruierbar sind): die Ellipse

$$f(\xi, \eta) = \xi^2 + 2\eta^2 - 2r^2 = o$$

mit den Brennpunkten $F_1 F_2$ und den Hauptscheiteln $(\pm r\sqrt{2}, o)$.

c) Bei den **orthogonalen** Kegeln (deren zyklische Ebenen zu je einer Kegelkante senkrecht stehen): das Geradenpaar

$$c(\xi, \eta) = \xi^2 - r^2 = o,$$

die Meridianfläche eines Umdrehungszylinders.

d) Bei den Kegeln **Reyes** (deren Fokalachsen zu je einer Tangentialebene senkrecht stehen): die Lemniskate[2])

$$d(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2r^2(\xi^2 - \eta^2) = o$$

mit dem Brennpunkten F_1 und F_2 (und den Scheiteln $[\pm r\sqrt{2}, 0]$).

h) Bei den **orthozyklischen** Kegeln deren zyklische Ebenen zu einander senkrecht stehen): die gleichseitige Hyperbel

$$h(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2 - r^2 = o$$

mit den Scheiteln F_1 und F_2.

g) Bei den **orthofokalen** Kegeln (deren Fokalachsen zu einander senkrecht stehen): das Kreispaar

$$g(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2 + r^2)^2 - \frac{9}{2} r^2 \xi^2 = o$$

mit den Mittelpunkten $(\pm \frac{3}{4} r \sqrt{2}, 0)$ und dem Radius $\frac{1}{4} r \sqrt{2}$.[3])

---

[1]) Vgl. die Anmerkung [2]) auf S. 12 nach der Tabelle des § 4. Hiebei ist $\mathfrak{K}$ als Grenzgestalt eines Umdrehungshyperboloides aufzufassen.

[2]) Es ist dies die gewöhnliche Lemniskate Bernoullis, deren Punkte von den festen Punkten F_1, F_2 $(\pm r, o)$ Abstände r_1 und r_2 besitzen, deren Produkt gleich r^2 ist: $r_1 \cdot r_2 = r^2$.

[3]) Die auf diesen Kreisen gelegenen Punkte haben Abstände von F_1 und F_2, welche sichverhalten wie $(\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{2} + 1)$ oder umgekehrt. Dieses Kreispaar g ist die Meridiankurve eines Torus (einer Wulstfläche) um die Achse η.

Dreht man die zu einem bestimmten Typus gehörende Meridiankurve um die Achse η des Kreises $\mathfrak{K}$, so beschreibt sie eine Umdrehungsfläche, welche der Ort ist für die Scheitel P aller Kegel dieses Typus über der Basis $\mathfrak{K}$.

Zum Beweise aller Behauptungen der Tabelle brauchen wir die folgende Darstellung der Abstände ξ, η des Scheitels P eines allgemeinen Kegels zweiter Ordnung (Gl. 1′) von der Achse und von der Ebene des auf ihm gelegenen Kreises $\mathfrak{K}$ vom Radius r:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \pm \frac{r}{tg^2\alpha} \sqrt{(1+tg^2\alpha)\,(tg^2\alpha - tg^2\beta)}, \\ \eta &= \pm \frac{r}{tg^2\alpha} \cdot tg\beta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

d. h. die Darstellung von ξ, η durch die — nur von den Achsen des sphärischen Kegelschnittes abhängigen — Koeffizienten der Gleichung (1′).

Wir leiten diese für uns wichtigen Beziehungen (6) aus der Figur 4 des charakteristischen Dreieckes $F_1\,F_2\,P$ (eines allgemeinen Kegels mit der Gl. 1′) her. Die Koordinatenachsen ξ und η (und ebenso die beiden Kegelachsen y und z durch den Kegelscheitel P) liegen in der Ebene unseres Dreieckes, der Zeichenebene. Die auf den Neben-Scheitelkanten des Kegels gelegenen Seiten

$$PF_1 = r_1 \text{ und } PF_2 = r_2$$

des charakteristischen Dreieckes haben die Kegelachsen y und z zu Winkelhalbierenden. Die innere Kegelachse z, welche mit den beiden genannten Seiten den Winkel β bildet, trifft die Basis $F_1\,F_2$ unseres charakteristischen Dreieckes (d. h. den in die Zeichenebene, auf die Achse ξ fallenden Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}$) im Punkte M und schliesst dort mit der Achse ξ den Winkel φ ein, da die Ebene ($\xi\zeta$) von $\mathfrak{K}$ zu einer der beiden zyklischen Ebenen ($\varkappa$ oder $\varkappa'$) des Kegels parallel ist.

Bei F_1 ist demgemäß der Außenwinkel $\measuredangle\, \xi\, F_1\, P$ des charakteristischen Dreieckes $F_1\,F_2\,P$ gleich $\varphi + \beta$, bei F_2 der Innenwinkel $\measuredangle\, \xi\, F_2\, P$ gleich $\varphi - \beta$; es wird das Verhältnis der Seiten dieses Dreieckes

$$r_1 : r_2 : 2\,r = \sin(\varphi - \beta) : \sin(\varphi + \beta) : \sin\, 2\beta \;\ldots (^*).$$

Nun ist im Dreiecke $MF_1P \ldots MF_1 = F_1P \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi} = r_1 \dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi}$,

im " $F_2MP \ldots F_2M = F_2P \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi} = r_2 \dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi}$,

daher $2\,r = 2 \cdot F_2O = F_2\,F_1 = F_2M + MF_1 = (r_1 + r_2)\dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi}$

und somit $\ldots\; r_2 + r_1 = 2\,r\,\dfrac{\sin\varphi}{\sin\beta} (^{**})$

Aus (*) und (**) folgt $r_2 - r_1 = 2\,r\,\dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\beta} - \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}\right) \\ r_2 &= r\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\beta} + \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}\right) \end{aligned}\right\} (^*{}_*)$$

Die zur Basis $F_1\,F_2 = 2\,r$ gehörige Höhe η des charakterischen Dreieckes $F_1\,F_2\,P$ wird sich (abgesehen vom Vorzeichen, welches unbestimmt bleibt) durch

die beiden Seiten r_1, r_2 und den von ihnen eingeschlossenen Winkel so ausdrücken: $\eta = (\pm)\, r_1 r_2 \frac{\sin 2\beta}{2r}$ und wenn wir hierin den aus $(_{*}{}^{*}{}_{*})$ sich ergebenden Wert von $r_1 r_2$ einsetzen,

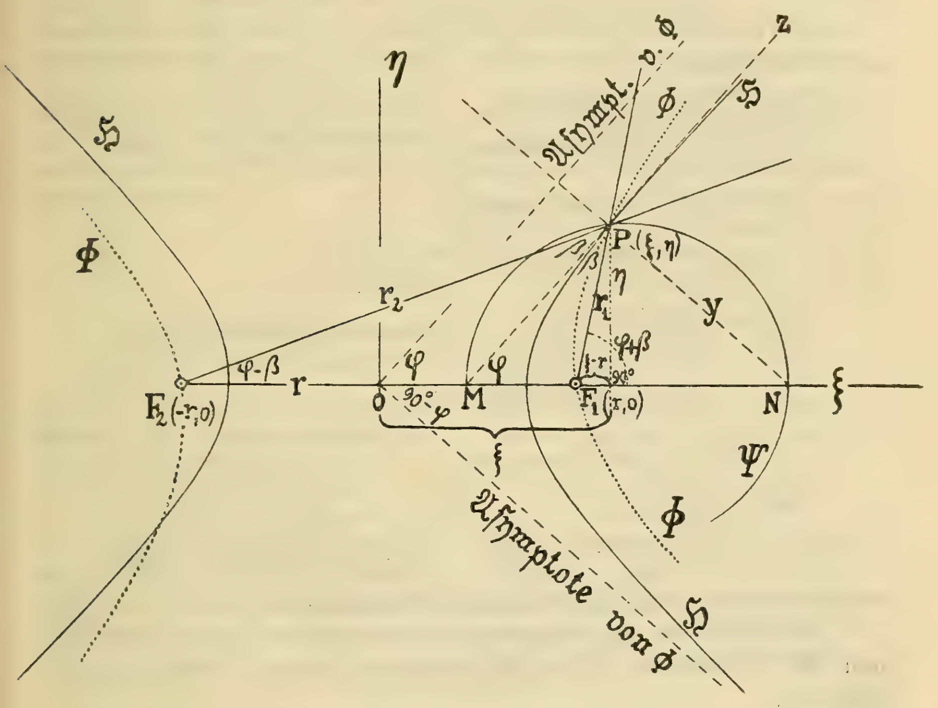


Fig. 4. Zur Ableitung einiger Beziehungen in charakteristischen Dreiecke eines Kreiskegels. [Wandert der Scheitel P des Kegels über dem Kreise $\mathfrak{K}$ (mit dem Durchmesser F_1 und F_2 in der Ebene $\eta = o$) auf der Hyperbel $\mathfrak{H}$ (mti den Brennpunkten F_1 und F_2), so bleibt $tg^2\beta : tg^2\alpha = konst.$ Dagegen bleibt φ *konstant*, wenn sich P auf der gleichseitigen Hyperbel Φ bewegt, ohne F_1 oder F_2 zu überschreiten.]

$$\eta = (\pm)\, r \left(\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta} - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\beta}\right) \sin\beta \cos\beta = (\pm)\, r\, (\sin^2\varphi\, cotg\beta - \cos^2\varphi\, tg\beta)$$

$$= (\pm)\, r \left(\frac{tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi}\, cotg\beta - \frac{1}{1 + tg^2\varphi}\, tg\beta\right), \text{ also mit Rücksicht auf Gl. (3') im § 2}$$

$$= (\pm)\, r \left(\frac{tg\beta}{tg^2\alpha}\, \frac{1 + tg^2\alpha}{1 + tg^2\beta} - \frac{tg\beta}{tg^2\alpha}\, \frac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{1 + tg^2\beta}\right)$$

$$= (\pm)\, r\, \frac{tg\beta}{tg^2\alpha}$$

womit die zweite Gleichung unter (6) abgeleitet ist. Um nun auch die erste und

damit ξ zu finden, bestimmen wir gemäß der Fig. 4 vor allem die Länge $p = OP$ durch r_1, r_2 und damit durch α und β. Gelingt dies, so werden wir wegen

$$p^2 = OP^2 = \xi^2 + \eta^2$$

sogleich

$$\xi^2 = p^2 - \eta^2 = p^2 - r^2 \frac{tg^2\beta}{tg^4\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\dagger)$$

mitbestimmt haben.

Aus der Figur 4 ist abzulesen

$$\left.\begin{matrix} r_1^2 = \eta^2 + (r-\xi)^2 \\ r_2^2 = \eta^2 + (r+\xi)^2 \end{matrix}\right\}, \text{ woraus folgt } \begin{matrix} r_1^2 + r_2^2 = 2(\xi^2 + \eta^2) + 2r^2 \\ = 2p^2 + 2r^2 \end{matrix}, \text{ also}$$

$$p^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - r^2 \text{ und wegen } ({}_*{}^*{}_*)$$

$$= r^2 \left(\frac{sin^2\varphi}{sin^2\beta} + \frac{cos^2\varphi}{cos^2\beta}\right) - r^2 = r^2 \frac{cos^2\varphi}{cos^2\beta} \left(\frac{tg^2\varphi}{tg^2\beta} + 1\right) - r^2$$

$$= r^2 \frac{1 + tg^2\beta}{tg^2\beta} \frac{tg^2\beta + tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi} - r^2 \text{ und mit Rücksicht auf Gl. (3')}$$

$$= r^2 (1 + tg^2\beta) \frac{1 + 2\,tg^2\alpha - tg\beta}{tg^2\alpha\,(1 + tg^2\beta)} - r^2$$

$$= r^2 \left(1 + \frac{1 - tg^2\beta}{tg^2\alpha}\right)$$

Nach $(\dagger)$ wird

$$\xi^2 = r^2 \left(1 + \frac{1 - tg^2\beta}{tg^2\alpha} - \frac{tg^2\beta}{tg^4\alpha}\right) \qquad = \frac{r^2}{tg^4\alpha} (1 + tg^2\alpha)(tg^2\alpha - tg^2\beta),$$

womit auch die erste von den Gleichungen (6) abgeleitet ist.

Mit Hilfe der so gefundenen Gleichungen (6) **beweisen** wir nun die Richtigkeit **aller** Behauptungen unserer **Tabelle** (zur Figur 3):

$$\xi^2 = \frac{r^2}{tg^4\alpha} (1 + tg^2\alpha)(tg^2\alpha - tg^2\beta), \qquad \eta^2 = \frac{r^2}{tg^4\alpha} \cdot tg^2\beta \ldots (6).$$

a) $\xi^2 + 2\eta^2 - r^2 = \frac{r^2}{tg^4\alpha}(tg^2\alpha + tg^2\beta - tg^2\alpha\, tg^2\beta)$ nimmt bei Heranziehung der für den Typus *a)* der Kegel **Schröters** charakteristischen Gleichung $cotg^2\alpha + cot^2\beta = 1$ oder $tg^2\alpha + tg^2\beta - tg^2\alpha\, tg^2\beta = 0$ den Wert **Null** an und umgekehrt folgt aus $\xi^2 + 2\eta^2 - r^2 = 0$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.	*b)* $\xi^2 + \eta^2 - 2r^2 = \frac{r^2}{tg^4\alpha}(1 + tg^2\alpha)(1 - tg^2\alpha - tg^2\beta)$ nimmt bei Heranziehung der für den Typus *b)* der Kegel **Monges** charakteristischen Gleichung $tg^2\alpha + tg^2\beta = 1$ oder $1 - tg^2\alpha - tg^2\beta = 0$ den Wert **Null** an und umgekehrt folgt aus $\xi^2 + \eta^2 - 2r^2 = 0$ nebst der Forderung nach einem **reellen** Werte von $tg\alpha$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

e)
$$\xi^2+\eta^2-r^2=\frac{r^2}{tg^2\alpha}(1-tg^2\beta)$$
nimmt bei Heranziehung der für den Typus *e)* der Kegel des Pappus charakteristischen Gleichung $tg^2\beta=1$ oder
$$1-tg^2\beta=0$$
den Wert Null an und umgekehrt folgt aus $\xi^2+\eta^2-r^2=0$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

f)
$$\xi^2+2\eta^2-2r^2=\frac{r^2}{tg^2\alpha}(tg^2\alpha+tg^2\beta)(1-tg^2\alpha)$$
nimmt bei Heranziehung der für den Typus *f)* der Kegel des Hachette charakteristischen Gleichung $tg^2\alpha=1$ oder
$$1-tg^2\alpha=0$$
den Wert Null an und umgekehrt folgt aus $\xi^2+2\eta^2-2r^2=0$ nebst der Forderung nach reellen und nicht (zugleich) verschwindenden Werten von $tg\alpha$ und $tg\beta$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

c)
$$\xi^2-r^2=\frac{r^2}{tg^4\alpha}(tg^2\alpha-tg^2\beta-tg^2\alpha\, tg^2\beta)$$
nimmt bei Heranziehung der für den Typus *c)* der Orthogonalkegel charakteristischen Gleichung
$$cotg^2\beta-cotg^2\alpha=1 \text{ oder}$$
$$tg^2\alpha-tg^2\beta-tg^2\alpha\, tg^2\beta=0$$
den Wert Null an und umgekehrt folgt aus $\xi^2-r^2=0$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

d)
$$(\xi^2+\eta^2)^2-2r^2(\xi^2-\eta^2)=\frac{r^4}{tg^4\alpha}(1+tg^2\alpha+tg^2\beta)(1-tg^2\alpha+tg^2\beta)$$
nimmt bei Heranziehung der für den Typus *d)* der Kegel Reyes charakteristischen Gleichung
$$tg^2\alpha-tg^2\beta=1 \text{ oder}$$
$$1-tg^2\alpha+tg^2\beta=0$$
den Wert Null an und umgekehrt folgt aus $(\xi^2+\eta^2)^2-2r^2(\xi^2-\eta^2)=0$ nebst der Forderung nach reellen Werten von $tg\alpha$ und $tg\beta$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

h)
$$\xi^2-\eta^2-r^2=\frac{r^2}{tg^2\alpha}(tg^2\alpha-2tg^2\beta-tg^2\alpha\, tg^2\beta)$$
nimmt bei Heranziehung der für den Typus *h)* der orthozyklischen Kegel charakteristischen Gleichung
$$cotg^2\beta-cotg^2\alpha=1 \text{ oder}$$
$$tg^2\alpha-2tg^2\beta-tg^2\alpha\, tg^2\beta=0$$
den Wert Null an und umgekehrt folgt aus $\xi^2-\eta^2-r^2=0$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

g)
$$2(\xi^2+\eta^2+r^2)^2-9r^2\xi^2=\frac{r^4}{tg^4\alpha}(2+tg^2\alpha+tg^2\beta)(1-tg^2\alpha+2tg^2\beta)$$
nimmt bei Heranziehung der für den Typus *g)* der orthofokalen Kegel charakteristischen Gleichung
$$tg^2\alpha-2tg^2\beta=1 \text{ oder}$$
$$1-tg^2\alpha+2tg^2\beta=0$$
den Wert Null an und umgekehrt folgt aus $2(\xi^2+\eta^2+r^2)^2-9r^2\xi^2=0$ nebst der Forderung nach reellen Werten von $tg\alpha$ und $tg\beta$ auch die Geltung der obigen, für den Typus charakteristischen Gleichung.

Hiemit sind alle Behauptungen unserer Tabelle (zur Figur 3) bewiesen.

§ 6.

Die höher-speziellen Kegel, welche zweien der betrachteten Typen zugleich angehören.

Die Figur 3 zeigt die Scheitel P solcher höher-spezieller Kegel über dem festen Kreise $\mathfrak{K}$ ($\eta = o$, $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$) in den gemeinsamen Punkten je zweier der gezeichneten, zu den betrachteten speziellen Typen gehörenden Meridiankurven der $\xi\ \eta$ Ebene.

Wir beschränken uns auf reelle Kegel und erwähnen nur kurz vorweg deren Ausartungen, welche sich für Lagen von P in der Ebene $\eta = 0$ des Kreises $\mathfrak{K}$ (in der Figur 3 also auf der ξ Achse) ergeben. Eine höher-spezielle reelle Ausartung ergibt sich für die Lage des Scheitels P

1. auf einem Punkte (in der Figur F_1 oder F_2) des Kreises $\mathfrak{K}$, wenn man sich vorstellt, daß P sich einem dieser Punkte, etwa dem Punkte F_1 dieses Kreises, derart nähert, daß die Ebene, welche P mit der Kreistangente in diesem Punkte F_1 verbindet, zur Kreisebene senkrecht bleibt: „Ein zu einander senkrechtes Paar von Ebenen ist zugleich die Ausartung aller — in unserer linken Spalte angeführten — Büscheltypen von *a*) Schröter — *e*) Pappus — *c*) Orthogonal — *h*) orthozyklischen Kegeln zweiter Ordnung."
2. Für die Lage von P auf einem Punkte (in der Figur N_1 oder N_2) des mit $\mathfrak{K}$ konzentrischen Kreises ($\eta = o$, $\xi^2 + \eta^2 = 2r^2$) vom Radius $r\sqrt{2}$ ergibt sich: „Ein zu einander senkrechtes Paar von Strahlen ist zugleich die Ausartung aller — in unserer rechten Spalte angeführten — Schartypen von *b*) Monge — *f*) Hachette — *d*) Reye — *g*) orthofokalen Kegeln zweiter Klasse."

In unserer Tabelle der höher-speziellen, nicht ausgearteten reellen Kegel sind die aus der gleichzeitigen Geltung je zweier der für die Typen charakteristischen Gleichungen folgenden besonderen Werte von

$$\alpha,\ \beta;\ \varphi,\ \psi;\ \xi,\ \eta$$

angegeben. Die Hilfsrechnungen, welche jeder Leser leicht anstellen kann, sind dort fortgelassen. Die Tabelle selbst ist (aus technischen Gründen) ganz am Schlusse dieser Abhandlung angefügt worden.

§ 7.

Von weiteren höher-speziellen Kegeln

zählen wir nur noch drei auf, nachdem wir vorweg die Grenzgestalt $\alpha = \beta = o$ ($P\infty$ — fern auf der η Achse) eines orthogonalen Drehkegels, und den ausgearteten Umdrehungskegel Reyes durch den Hinweis abgefertigt haben, dass sich letzterer für die Lage des Kegelscheitels P im Mittelpunkte O des

Kreises $\mathfrak{K}$ ergibt (Doppelebene als ausgearteter Umdrehungskegel des Typus *d* Reyes für $\alpha = \beta = 90^0$).

Zwei von den drei Kegeln, die wir jetzt noch aufzählen, sind die schon im § 4. bei *a*) und *b*) erwähnten,

in der Figur 3 zu	bzw. zu
$P^*(\xi = 0,\ \eta = \pm\frac{1}{2}\, r\sqrt{2})$	$P^{*\prime}(\xi = 0,\ \eta = \pm r\sqrt{2})$
	gehörigen

Umdrehungskegel

A) Schröters.	B) Monges.
$tg^2\alpha = 2 = tg^2\beta$ $\alpha = \alpha^* = 54^0\, 44'\, 8{\cdot}2'' = \beta$	$tg^2\alpha = \frac{1}{2} = tg^2\beta$ $\alpha = \beta^* = 35^0\, 15'\, 51{\cdot}8'' = \beta$
$\varphi = 90^0,\ \psi = 0$	$\varphi = 90^0,\ \psi = 0$
$\xi = 0,\ \eta = \pm\frac{1}{2}\, r\sqrt{2}$	$\xi = 0,\ \eta = \pm r\sqrt{2}$

[$\alpha^* + \beta^* = 90^0$, der eine Kegel ist dem (absoluten) Polarkegel des anderen kongruent].

Außer diesen bereits bekannten Kegeln setzen wir noch den durch das Verhältnis 2 : 1 der sphärischen Halbachsen α und β ausgezeichneten, sog. „mittleren“, d. h. mit seinem (absoluten) Polarkegel kongruenten ($\alpha + \beta = 90^0$) Spezialkegel her, welcher zum Punkte $P_{\text{III}}\left(\xi = \pm\frac{4}{9}\, r\sqrt{6},\ \eta = \pm\frac{1}{9}\, r\sqrt{3}\right)$ der Figur 3 gehört ($\sphericalangle F_1 P_{\text{III}} F_2 = 2\beta = 180^0 - 2\alpha = 60^0$):

$tg^2\alpha = 3, \quad \alpha = 60^0$	$tg^2\beta = \frac{1}{3}, \quad \beta = 30^0$
$tg^2\varphi = tg^2\beta\,\frac{tg^2\alpha + 1}{tg^2\alpha - tg^2\beta} = \frac{1}{2}$ $\varphi = \beta^* = 35^0\, 15'\, 51{\cdot}8''$	$tg^2\psi = \frac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{1 + tg^2\beta} = 2$ $\psi = \alpha^* = 54^0\, 44'\, 8{\cdot}2''$

(Nach Gl. 6 des § 5.) $\xi = \pm\frac{4}{9}\, r\sqrt{6}, \quad \eta = \pm\frac{1}{9}\, r\sqrt{3}.$

III. Bifokale Abbildung und Einteilung der allgemeinen Kreiskegel.

§ 8.

Die Lagenbeziehung zwischen den Scheiteln zweier Kegel von zu einander absolut-polarer Form über demselben Basiskreise $\mathfrak{K}$. [„**Bifocale Beziehung**“ in der Meridianebene (ξ, η) dieses Kreises.] Der Typus der zu ihren **Polar**kegeln **kongruenten** Kegel

$$(tg^2\alpha \, . \, tg^2\beta = 1, \ \alpha + \beta = 90^0).$$

Die Meridiankurve jener Drehfläche, auf welcher die Scheitel der Kegel dieses **neuen** Typus liegen, wenn als Kegelbasis derselbe feste Kreis $\mathfrak{K}$ ($\eta = 0$, $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$) angenommen wird: Die **Koffeide** k [Der Ort von Punkten der Meridianebene (ξ, η) dieses Kreises, die **bifokal sich selbst** entsprechen.]

Jeder reelle Kegel mit den sphärischen Halbachsen α und β ($\alpha \geqq \beta$) hat einen (absoluten) Polarkegel[1]) mit den Halbachsen $\alpha' = 90^0 - \beta$ und $\beta' = 90^0 - \alpha$. ($\alpha' \geqq \beta'$). Er ist also zu seinem eigenen Polarkegel dann und nur dann kongruent, wenn

$$\alpha + \beta = 90^0$$

ist. Kegel dieses (neuen) Typus sollen

„mittlere“ oder „zu sich selbst polarkongruente“[2]) genannt werden, jene dagegen, bei welchen

$\alpha + \beta < 90^0$ ist, sollen „scharf“, und jene, bei welchen $\alpha + \beta > 90^0$ ist, „flach“ heißen.

Wegen der für die Kegel des mittleren Typus giltigen Gleichung $tg^2\alpha \, . \, tg^2\beta = 1$ folgt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{mit Rücksicht auf (3') (§ 2)} & tg^2\varphi = \dfrac{1}{tg^2\alpha - 1} \\ \text{und „ „ „ (5') (§ 2)} & tg^2\psi = tg^2\alpha - 1 \end{array}\right\}, \text{ daß für dieselben}$$

$$\text{auch } tg^2\varphi \, . \, tg^2\psi = 1 \text{ d. h. } \varphi + \psi = 90^0 \text{ ist.}$$

Umgekehrt folgt (aus 3' und 5'): Wenn die Gleichung

$$\varphi + \psi = 90^0, \text{ also } tg^2\varphi \, . \, tg^2\psi = 1$$

bei einem Kegel zweiter Ordnung erfüllt ist, ohne daß $\alpha = \beta$, $tg^2\alpha - tg^2\beta = 0$, d. h. ohne daß der Kegel ein Drehkegel ($\varphi = 90^0$, $\psi = 0$) ist, so ist auch

$$tg^2\beta\,\frac{1+tg^2\alpha}{1+tg^2\beta}=1 \text{ d. h. } tg^2\alpha\,.\,tg^2\beta=1,\ \alpha+\beta=90^0.$$

$\left.\begin{cases}\alpha+\beta<90^0 \text{ zieht auch } \varphi+\psi<90^0 \text{ nach sich}\\ \alpha+\beta>90^0 \text{ „ „ } \varphi+\psi>90^0 \text{ „ „}\end{cases}\right\}$, falls nicht gerade $\alpha=\beta$, d. h. $\varphi=90^0$, $\psi=0$ ist, also wenn der Kegel kein Drehkegel ist.

$$\left.\begin{cases}\varphi+\psi<90^0 \text{ zieht stets auch } \alpha+\beta<90^0 \text{ nach sich}\\ \varphi+\psi>90^0 \text{ „ „ „ } \alpha+\beta>90^0 \text{ „ „}\end{cases}\right\}.$$

Auch beim neuen Typus der „mittleren“ Kegel werden wir (ebenso wie bei den Typen Reyes in § 5) fragen nach der für ihn charakteristischen Meridiankurve in der Meridianebene (ξ, η) des Kreises $\mathfrak{K}$, der Meridiankurve k in den Figuren 3 und 5. [Die $\frac{\text{außerhalb}}{\text{innerhalb}}$ k gelegenen Punkte dieser Ebene gehören (als Scheitel von Kegeln mit der Basis $\mathfrak{K}$) zu $\frac{\text{scharfen}}{\text{flachen}}$ Kegelformen; nur die auf k gelegenen Punkte sind Scheitel von mittleren, d. h. „zu sich selbst polarkongruenten“ Kegeln über $\mathfrak{K}$.] Zu jedem Kegel mit den sphärischen Halbachsen α, β gehört ein Polarkegel [1]) mit dem sphärischen Halbachsen $\begin{cases}\alpha'=90^0-\beta\\ \beta'=90^0-\alpha\end{cases}$: da wegen $\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=180^0$ aus $\alpha+\beta \lesseqgtr 90^0$ auch $\alpha'+\beta' \gtreqless 90^0$ folgt, gehört zu jedem $\frac{\text{scharfen}}{\text{flachen}}$ Kegel ein $\frac{\text{flacher}}{\text{scharfer}}$ Polarkegel.

Zwei Kegel, von denen einer mit dem Polarkegel des anderen kongruent ist, sollen „polar-kongruent“ heißen.[2]) Jeder scharfen Kegelform ist eine flache Form polarkongruent und umgekehrt.

Die zu $\alpha+\beta=90^0$ gehörigen „mittleren“ Kegelformen sind die einzigen reellen, welche zu ihren eigenen Polarkegeln kongruent d. h. „polarkongruent zu sich selbst“ sind.[3]) — Jeder Kegel ist „polarkongruent“ zum

---

[1]) Wenn zwei Kegel (absolute) Polarkegel von einander sind, so stehen die Kanten und Tangentialebenen des einen senkrecht zu den Tangentialebenen, bzw. zu den Kanten des anderen.

[2]) Vgl. die folgende Fussnote.

[3]) „Polar-kongruent sein zu sich selbst“ und „polar sein zu sich selbst“ bedeutet nicht dasselbe. Das letztere (vgl. die vorvorige Fussnote) ist bei reellen Kegeln nur der Fall für den „mittleren“ Umdrehungskegel mit dem halben Öffnungswinkel $\alpha=\beta=45^0$, welchen wir oben im § 4 bei *e*) und *f*) und in der Tabelle des § 6 unter *ef*) als einen Kegel des Pappus und zugleich des Hachette kennen gelernt haben, und der in unserer Figur 3 zum Kegelscheitel P_0 gehört. Das erstere

eigenen Polarkegel, in welche Lage auch immer man den letzteren durch starre Bewegung bringen möge. —

In der Figur 3 wird jeder Kreiskegel $P(\mathfrak{K})$ durch einen Punkt P als Scheitel (nebst den ihn begleitenden, symmetrisch zu P bzl. der Achsen ξ, η in den drei anderen Quadranten gelegenen Punkten) dargestellt, durch den „bifokalen Repräsentanten" der betreffenden Kegelform. Wir können nun bei jedem Punkte $P\ (\xi, \eta)$ der Ebene unserer Figur fragen nach dem in derselben Meridianebene (ξ, η) gelegenen Scheitel

$$P'\ (\xi', \eta')$$

des polar-kongruenten Kegels über demselben festen Basiskreise $\mathfrak{K}\ (\xi^2 + \zeta^2 = r^2, \eta = o)$.[1]) Diese Beziehung zwischen P und P' ist eine völlig wechselseitige, so dass wir Konstruktionen und Formeln (§ 10) zu erwarten haben, welche ungeändert bleiben, wenn man P mit P', also ξ mit ξ' und zugleich η mit η' vertauscht. Wir wollen sie als eine „bifokale" Beziehung und die Punkte P und P' als „einander bifokal entsprechend" oder als „bifokale Bilder von einander" mit Bezug auf die beiden „Fokalpunkte" F_1 und F_2 (als „Pole") bezeichnen. „Bifokal einander entsprechende" Punkte sind „bifokale Repräsentanten" zweier zu einander absolut-polarer Kegelformen.

Jede Kurve der ξ, η Ebene, bei welcher zu jedem ihrer Punkte der bifokal — bezüglich zweier „Fokalpunkte" (oder „Pole") F_1 und F_2 — entsprechende ebenfalls auf der Kurve liegt, soll „bifokal zu sich selbst" oder „autobifokal" genannt werden (in Anlehnung an die Bezeichnung „anallagmatisch" bei einer bezüglich eines Inversionskreises zu sich selbst inversen Kurve.)

---

ist der Fall bei allen Kegeln unseres „mittleren" Typus $(\alpha + \beta = 90^0)$: Jeder Kegel dieses Typus kann aus seinem Polarkegel gewonnen werden oder man kann umgekehrt jeden Polarkegel eines mittleren Kegels aus dem letzteren selbst erzeugen, indem man den einen der beiden in Rede stehenden Kreiskegel um die gemeinsame innere Achse z herum um 90^0 dreht oder, was hier auf dasselbe hinausläuft, denselben an einer der beiden Ebenen $(y = \pm x)$ spiegelt, welche durch die z Achse gehen und die Winkel der durch diese Achse z gehenden Symmetrieebenen des Kegels halbieren.

[1]) Die durch einen Punkt $P'\ (\xi', \eta')$ bestimmten, P' begleitenden d. h. zu P' bezüglich der ξ und η Achse symmetrischen Punkte $(\pm \xi', \pm \eta')$ erwähnen wir der kürzeren Redeweise wegen oft nicht besonders, sondern sprechen lieber von einer Beziehung zwischen den Punkten P und P' als zwischen den (symmetrischen) Punktquadrupeln. Wir können am bequemsten P und P' im selben (ersten) Quadranten gelegen annehmen: $P(+\xi, +\eta)$ und $P'(+\xi', +\eta')$, um es nur mit positiven Koordinaten ξ, η zu tun zu haben.

„Autobifokal“ können wir ebenso einen Punkt nennen, der bifokal sich selbst entspricht; so z. B. ist in der Figur 3 der Punkt P_{III}, ebenso etwa der Schnittpunkt der Linien g und h (P_{II} in der Fig. 3), oder von d und c (P_I), oder von f und e (P_0), „autobifokal“ bezüglich der Pole F_1 und F_2. Die autobifokalen Punkte der Ebene (ξ, η), d. h. also die in dieser Ebene gelegenen Scheitel aller „mittleren“ oder „zu sich selbst polarkongruenten“ Kegel ($\alpha + \beta = 90^0$, $\varphi + \psi = 90^0$) über dem Kreise $\mathfrak{K}$ ($\xi^2 + \eta^2 = r^2$, $\eta = o$, mit dem Durchmesser $F_1 F_2$) erfüllen eine

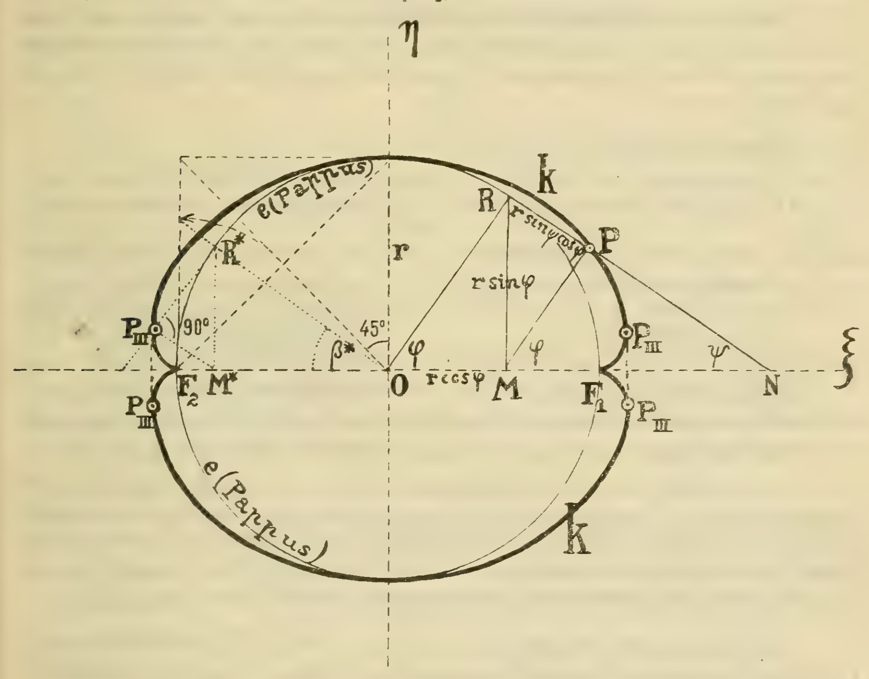


Fig. 5. Zirkelkonstruktion der Koffeide k.

Kurve k der autobifokalen Punkte (Figur 3. u. 5.), welche reelle Spitzen in den Polen F_1 und F_2 hat, die ihrerseits k schon bestimmen. (Vgl. die spätern Ausführungen im § 11.). Wir nennen diese Linie wegen ihrer Gestalt, welche an den Umriß einer Kaffeebohne errinnert,

„Koffeide.“

Alle Koffeiden sind einander ähnlich. Außerhalb der Koffeide k liegen in der (ξ, η) Ebene die Scheitel der „scharfen“, innerhalb

k jene der „flachen“ Kegel über $\mathfrak{K}$, die sich paarweise bifokal entsprechen. (S. 30.). Die Koffeide k ist die einzige (in der Ebene (ξ, η) gelegene, durch die Pole F_1 und F_2 bestimmte) „Kurve der autobifokalen Punkte“. Dieser Begriff ist wohl zu unterscheiden von dem obigen Begriff einer „autobifokalen Kurve“, welcher letztere eine große Manigfaltigkeit von Kurven umfaßt, z. B. in der Figur 3 die zerfallenden Kurven ab, ef, cd und hg, deren (nichtzerfallende) Züge a und b, e und f, c und d, h und g einander bifokal entsprechen.

Wegen des Entsprechens dieser Züge entsprechen sich auch in der Figur 3 die Scheitel jener höher-speziellen Kegel der Tabelle des § 6 bifokal, welche dort bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch angeordnet wurden, z. B. (ad) und (bc) u. s. w.

Wandert ein Punkt P in dieser Figur von

F_1 aus (anfänglich in der zur ξ Achse senkrechten Richtung)	so wandert der ihm bifokal entsprechende Punkt P (vom N_1 aus)
auf der Linie a bis zu ihren Schnittpunkten mit g und d,	auf der Linie b bis zu ihren Schnittpunkten mit h und c
oder auf der Linie e bis zu ihren Schnittpunkten mit g, d, $\boldsymbol{f}$	bzw. auf der Linie f bis zu ihrem Schnittpunkten mit h, c, $\boldsymbol{e}$
oder auf der Linie c bis zu ihren Schnittpunkten mit g, $\boldsymbol{d}$, f, b	bzw. auf der Linie d bis zu ihren Schnittpunkten mit $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{c}$, e, $\boldsymbol{a}$
oder auf der Linie h bis zu ihren Schnittpunkten mit g, d, f, b,	bzw. auf der Linie g bis zu ihren Schnittpunkten mit $\boldsymbol{h}$, d, f, b.

Wenn hiebei, den hier fett gedruckten Buchstaben entsprechend, P mit P' zusammenstösst, so geschieht dies nur auf der Koffeide k, denn der betreffende Punkt ist autobifokal, er ist der Scheitel eines „mittleren“ oder „zu sich selbst polarkongruenten“ Kegels; z. B. der Scheitel P_0 ($= ef$) oder P_I ($= cd$) oder P_{II} ($= hg$) des betreffenden höher-speziellen Kegels in der Figur 3.

Das wichtigste Beispiel einer nichtzerfallenden autobifokalen Kurve bietet in der (ξ, η) Ebene jede Hyperbel des Konfokalsystemes mit den Brennpunkten F_1 und F_2 ($\pm r$, o); z. B. $\mathfrak{H}$ in der Fig. 4. Für alle auf einer solchen Hyperbel gelegenen Scheitel P von Kegeln über $\mathfrak{K}$ als Basis ist nämlich — wie wir im nächsten § 9 beweisen — das Verhältnis $\frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha}$ konstant und behält wegen $\begin{pmatrix}\alpha' + \beta = 90^0 \\ \alpha + \beta' = 90^0\end{pmatrix}$ denselben Wert auch im Punkte P': $\left(\frac{tg^2\beta'}{tg^2\alpha'} = \frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha}\right)$; P' muß also auf derselben Hyperbel des Konfokalsystemes F_1 F_2 liegen, wie P; d. h. jede solche Hyperbel ist autobifokal. Von ihren reellen Punkten ist nur

das Quadrupel ihrer (bzl. der ξ und η Achse symmetrisch gelegenen) Schnittpunkte mit der Koffeide ($\pm \xi_0$, $\pm \eta_0$) autobifokal. Eine Übersicht über die Verteilung der bifokal entsprechenden Punkte jeder solchen Hyperbel liefert die Bemerkung — welche im § 10 nachgewiesen wird —, daß die Ordinaten η, η' bifokal entsprechender Punkte das (für jede einzelne dieser Hyperbeln) konstante Produkt η_0^2 haben. (Bzl. des Vorzeichens vgl. die letzte Fußnote in diesem § 8.)

Um (im § 10) zu jedem Punkte P (ξ, η) das bifokale Bild angeben und dann (im § 11) die Koffeide k näher studieren zu können, betrachten wir vorerst:

§ 9.

Die Lagen der Scheitel bei Kegeln mit den **gleichen** Werten von α, oder von $\frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha}$ oder von β, oder von φ oder von ψ über demselben Basiskreise $\mathfrak{K}$ ($\xi^2 + \zeta^2 = r^2$, $\eta = o$). Konstruktion eines reellen Kegels mit gegebener zyklischer und fokaler Halbweite (φ und ψ).

Da diese Kegelscheitel Drehflächen um die η Achse erfüllen, beschränken wir uns wieder auf die Angabe ihrer Meridiankurven in der $\xi\,\eta$ Ebene, der Ebene des charakteristischen Dreieckes $F_1\,F_2\,P$ eines Kegels mit (der Basis $\mathfrak{K}$ und) dem Scheitel P (ξ, η, o). Wir haben

$\alpha =$ konst. (Bei Kegelformen mit der gleichen sphärischen Hauptachse.)

auf jeder durch einen beliebigen Punkt P (ξ, η) der Meridianebene (ξ, η) gelegten Ellipse $\mathfrak{E}$ der Konfokalsystemes mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

Die Gleichungen (6) des § 5 oder

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\xi^2}{r^2(cotg^2\alpha + 1)} &= 1 - \frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha} \\ \frac{\eta^2}{r^2\,cotg^2\,\alpha} &= \frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (6)$$

geben in der Tat, wenn man sie addiert, . . . (6*)

$$\frac{\xi^2}{r^2\,(cotg^2\alpha + 1)} + \frac{\eta^2}{r^2 cotg^2\alpha} = 1, \quad \text{woraus}$$

die Richtigkeit der Behauptung folgt. Die beiden Tangenten aus den Hauptscheiteln der Ellipse $\mathfrak{E}$,

z. B. aus 𝔢 in der Fig. 6 an 𝔎 zeigen uns, (weil α auf 𝔈 konstant bleibt), in ihrem Winkel mit der ξ Achse den Winkel α. Daher wird auch der Kreis e der Fig. 3 und 6, welcher mit 𝔎 den Durchmesser $F_1 F_2$

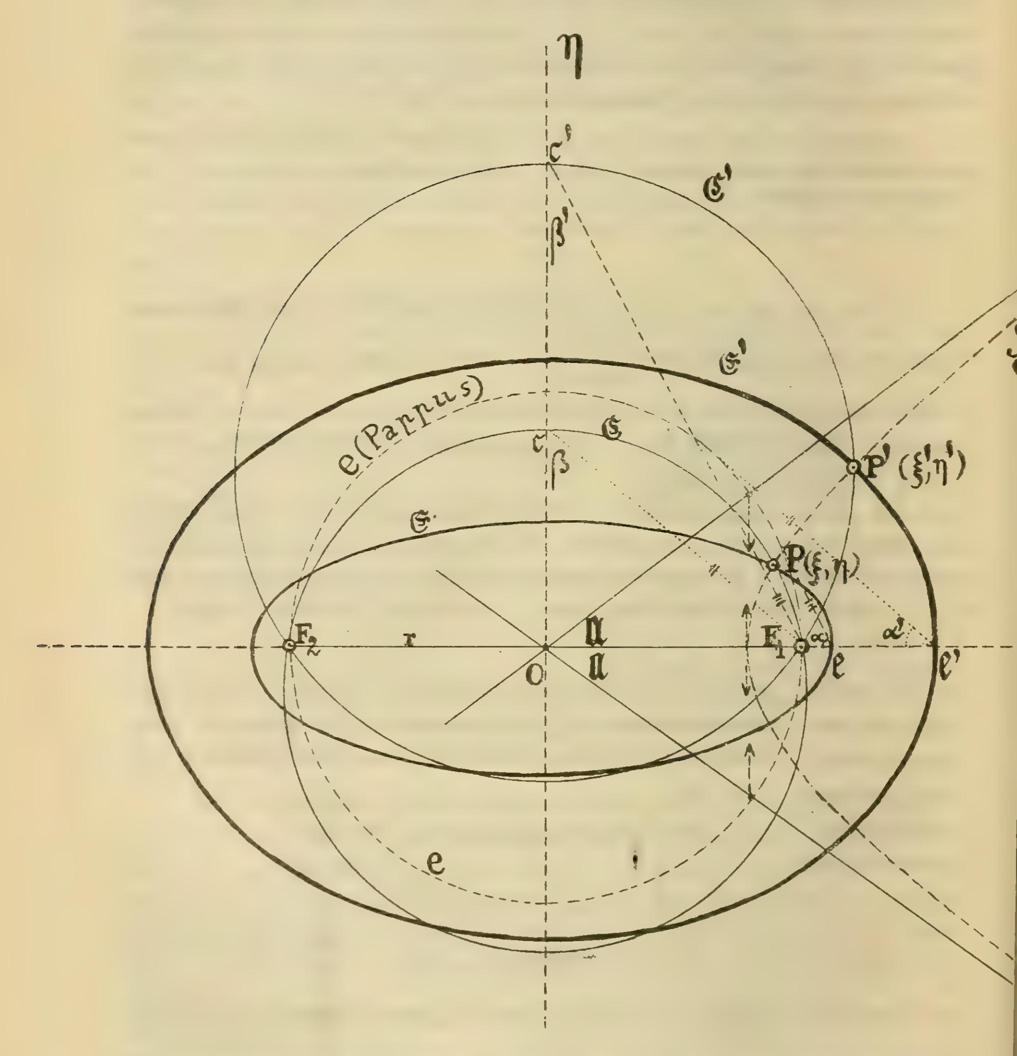


Fig. 6. Bestimmung des Scheitels P eines Kegels über dem festen Basiskreise 𝔎 $(\eta = o,\ \xi^2 + \zeta^2 = r^2)$ bei gegebenen sphärischen Halbachsen α und β; Bestimmung des Scheitels P' des zum vorigen polarkongruenten Kegels über demselben Basiskreise 𝔎. Die Punkte P und P' der Figur entsprechen einander bifokal.

gemein hat, und dessen Ebene, die Zeichenebene (ξ, η), zur Ebene von $\mathfrak{K}$ senkrecht steht, (ebenso wie $\mathfrak{K}$) aus den Hauptscheiteln der durch P gelegten Ellipse unseres Konfokalsystems unter dem Winkel 2α gesehen. Vgl. $\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}$, beim Hauptscheitel, $\begin{smallmatrix}\mathfrak{e}\\ \mathfrak{e}'\end{smallmatrix}$, der durch $\begin{smallmatrix}P\\ P'\end{smallmatrix}$ gelegten Konfokalellipse $\begin{smallmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}'\end{smallmatrix}$, in der Fig. 6. Die Ellipse f der Fig. 3 gehört (für $\alpha = 45^0$) ebenfalls zu den Ellipsen des Konfokalsystems $F_1 F_2$.

Wir haben

$\frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha} =$ konst. (Bei Kegelformen, welche aus einander durch proportionale Streckung der Distanzen aller Punkte von der inneren Kegelachse z hervorgehen.)[1])

auf jeder durch einen beliebigen Punkt $P(\xi, \eta)$ in der Meridianebene verzeichneten Hyperbel $\mathfrak{H}$ des Konfokalsystemes mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

Setzt man $\frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha} = sin^2\alpha$ . . . . (6a),

so geben nämlich die Gleichungen (6) des § 5 oder

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\xi^2}{r^2cos^2\alpha} = cotg^2\alpha + 1\\ \frac{\eta^2}{r^2sin^2\alpha} = cotg^2\alpha\end{array}\right\} \quad \left(\frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha} = sin^2\alpha\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(6a)}$$

bei ihrer Subtraktion wirklich $\frac{\xi^2}{r^2cos^2\alpha} - \frac{\eta^2}{r^2sin^2\alpha} = 1$, die Gleichung jener Konfokalhyperbel $\mathfrak{H}$, welche durch den Punkt P geht und deren Asymptoten mit der Achse ξ den Winkel α einschließen. Fig. 4 und 6. Die Wichtigkeit der Betrachtung dieser Hyperbeln wird aus unserer Bemerkung am Schlusse des vorigen § 8 klar.

$\beta =$ konst. (Bei Kegelformen mit der gleichen sphärischen Nebenachse.)

gilt für alle Punkte des Kreisbogens (F_1PF_2) welcher den beliebigen Punkt $P(\xi, \eta)$ der Meridianebene (ξ, η) mit F_1 und F_2 verbindet, (da für die Punkte desselben [vgl. § 5] $\sphericalangle F_1PF_2 = 2\beta$ ist) und ebenso gehört derselbe Wert von β zu jedem Punkte des bezüglich der ξ Achse zu dem oben genannten Bogen (F_1PF_2) symmetrischen Kreisbogens. F_2 ⊂⊃ F_1.

---

[1]) Derartige Kegelformen $\left(\frac{tg^2\beta}{tg\ \alpha} = \text{konst.}\right)$ erhält man, wenn man z. B. eine Ellipse aus den Punkten der durch ihren Mittelpunkt zu ihrer Ebene gelegten Senkrechten projiziert.

Die ebenfalls zu einander symmetrischen Ergänzungsbogen dieser beiden Kreise, welche von P durch F_1 auf der einen, F_2 auf der anderen Seite getrennt sind, gehören nicht zu demselben, sondern zu dem supplementären Werte der sphärischen Nebenachse.

Vgl. β in der Fig. 6 beim Schnittpunkte c des durch P, F_1 und F_2 gelegten Kreises $\mathfrak{C}$ mit der η Achse.

Der Kreis e der Figur 3 gehört ebenfalls (für $\beta = 45^0$) zu unserem Kreisbüschel mit den Grundpunkten F_1 und F_2.

Es ist ferner

$\varphi =$ konst. (Bei Kegelformen mit der gleichen zyklischen Halbweite, bei den Formen konzyklischer Kegel.)

auf dem durch den beliebigen Punkt P (ξ, η) der Zeichenebene gelegten und von F_1 und F_2 begrenzten Bogen jener gleichseitigen Hyperbel Φ, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O von $\mathfrak{K}$ (und des Hyperbeldurchmessers F_1F_2) ist und deren Asymptoten zu den Winkelsymmetralen von PF_1 und PF_2 parallel sind (Fig. 4) und ebenso hat φ denselben Wert auf dem zum vorigen bezüglich der ξ Achse symmetrischen Hyperbelbogen.

φ bleibt (analog wie β auf den Kreisen durch F_1 und F_1) auf dieser Hyperbel Φ nur solange konstant, als der auf Φ beweglich gedachte Punkt P weder über F_1 noch über F_2 hinübergeht; passiert er dagegen F_1 oder F_2, so geht φ in den komplementären Wert über.

Zum Beweise suche man den auf eine beliebige Parallele zur inneren Winkelsymmetralen von F_1PF_2 (welche ja mit der Achse ξ den Winkel φ bildet) fallenden Punkt der fraglichen Kurve, für welchen (als Kegelscheitel) φ denselben Wert haben soll wie für die Scheitellage in P: Auf jeder solchen Parallelen erhält man einen solchen Punkt im Endlichen, falls sie die ξ Achse zwischen F_1 und F_2 schneidet, indem man einen der beiden Pole F_1F_2 (gleichgiltig, welchen) an der Parallelen spiegelt und das Spiegelbild dieses Poles mit dem anderen der beiden Pole verbindet; diese Verbindungsgerade trifft die angenommene Parallele im gesuchten Punkte. Letzterer wandert aber auf der oben geschilderten gleichseitigen Hyperbel, wenn man eine andere und wieder eine andere Parallele (zur vorigen) wählt.

Sobald man aber eine Parallele (zu den vorigen) wählt, welche die Achse ξ in einem ausserhalb der Strecke F_1F_2 gelegenen Punkte schneidet, gelangt man so zu Punkten $\overline{P}$ statt P, bei denen die angenommene Parallele keine innere, sondern eine äußere Winkelsymmetrale von $F_1\overline{P}F_2$ ist,

so dass diese Punkte P derselben Hyperbel nicht mehr zur zyklischen Halbweite φ, sondern zu $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ gehören.

Die Figur 7 stellt einige im ersten Quadranten gelegene derartige gleichseitige Hyperbelbogen Φ über F_1F_2 als Durchmesser vor, für deren Punkte als Scheitel von Kegeln über $\mathfrak{K}$ ($\eta = o$, $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$) φ konstanten Wert hat.

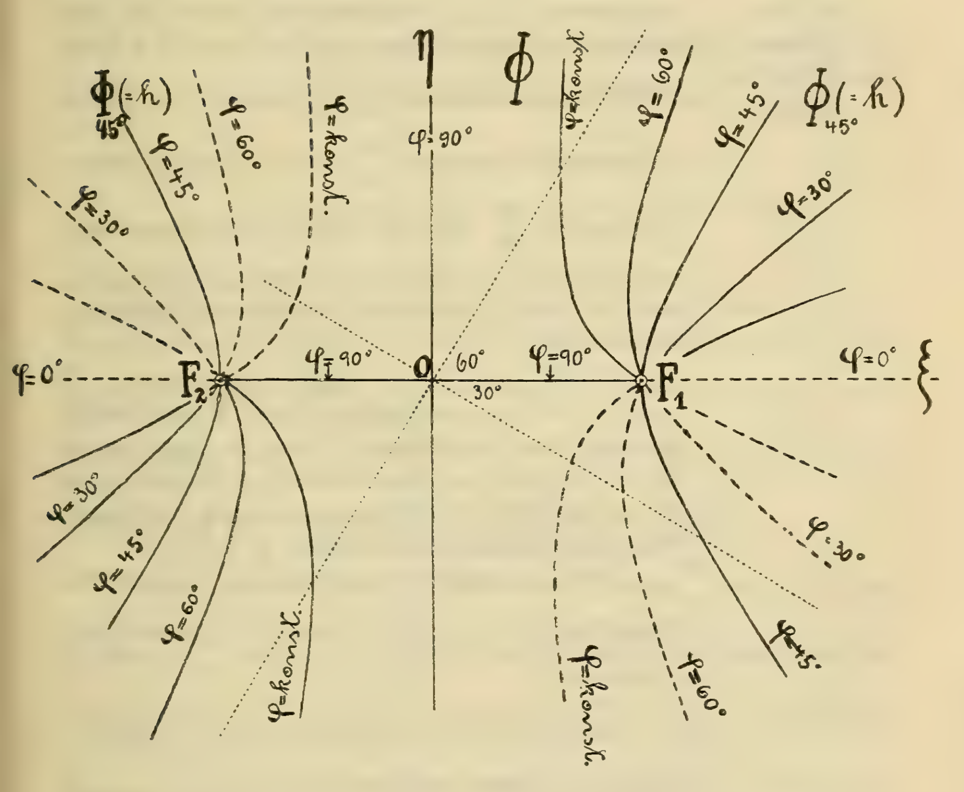


Fig. 7. Gleichseitige Hyperbelbogen über dem Durchmesser $F_1\ F_2 = 2r$, für deren Punkte als Scheitel von Kegeln über $\mathfrak{K}$ ($\eta = o$, $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$) die zyklische Halbweite φ konstant ist.

Unter ihnen befindet sich auch (für $\varphi = 45^0$) die gleichseitige Hyperbel h der Figur 3.

φ ist bei der Lage von P auf jedem dieser den ersten (und dritten) Quadranten durchlaufenden gleichseitigen Hyperbelbogen Φ der Figur 7 erkennbar im Winkel der den ersten

(und dritten) Quadranten durchlaufenden Asymptote mit der ξ Achse. Endlich haben wir

$\psi =$ konst. (Bei Kegelformen mit der gleichen fokalen Halbweite, bei den Formen konfokaler Kegel.)

für alle Kreise Ψ jenes Kreisbüschels (mit imaginären Basispunkten), welches durch die in ihm enthaltenen Punktkreise F_1 und F_2 bestimmt ist. Fig. 4 und Fig. 8[1]): Die Kreise $\frac{\Psi}{\Psi'}$ dieses Büschels schneiden den Kreis e der Zeichenebene ξ, η (mit dem Durchmesser $F_1 F_2$) orthogonal, sie haben ihre Mittelpunkte auf der ξ Achse und ihre auf die ξ Achse entfallenden Durchmesser $\frac{M\ N}{M'\ N'}$ werden von F_1 und F_2 harmonisch getrennt. $\frac{M}{M'}$ soll der auf der Strecke $F_1 F_2$ selbst, $\frac{N}{N'}$ der auf ihrer Verlängerung gelegene Endpunkt des genannten Durchmessers heißen. (Auch in der Fig. 3 gehört g zu diesem Kreisbüschel für $\psi = 45^0$.)

Ist ein Punkt P der Zeichenebene beliebig gegeben, so ist der durchgelegte Kreis Ψ des Büschels bestimmt und die Punkte M und N sind (vgl. die Fig. 4) bequem zu konstruieren als Schnittpunkte der ξ Achse $F_1 F_2$ mit der inneren und der äußeren Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle F_1 P F_2$.

Für alle Punkte P eines solchen Kreises Ψ ist bekanntlich $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PF_1}{PF_2}$ konstant, daher ist auch ψ konstant.

Beweis: Es ist $\frac{r_1}{r_2}$ (vgl. § 5 Gl. $*_*^*$) $= \frac{\sin(\psi - \beta)}{\sin(\varphi + \beta)}$

$$= \frac{tg\varphi - tg\beta}{tg\varphi + tg\beta} \text{ (wegen § 2 Gl. 3':)}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + tg^2\alpha} - \sqrt{tg^2\alpha - tg^2\beta}}{\sqrt{1 + tg^2\alpha} + \sqrt{tg^2\alpha + tg^2\beta}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{sec^2\beta}{sec^2\alpha}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{sec^2\beta}{sec^2\alpha}}}$$

[1]) Zum besseren Verständnis dieser noch später (§ 10) wichtigen Figur 8 führen wir hier dieselbe Betrachtung doppelt durch, für den Kreis Ψ (durch P) und den Kreis Ψ' (durch P').

(oder es ist $\frac{r_1}{r_2}$ gleich dem reziproken Werte hievon, entsprechend dem anderen Zeichen der Wurzeln).

Hieraus folgt, dass für die Punkte eines solchen Kreises Ψ mit $\frac{r_1}{r_2}$ auch $\frac{sec^2\beta}{sec^2\alpha}$ konstant, mithin auch, wie oben behauptet wurde,

$$tg\psi = \sqrt{\frac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{1 + tg^2\beta}} \text{ (vgl. § 2 Gl. 5')} = \sqrt{\frac{sec^3\alpha}{sec^2\beta} - 1}$$

konstant ist.

Man bemerkt, dass durch Elimination von $\frac{sec^2\beta}{sec^2\alpha}$ aus den für $\frac{r_1}{r_2}$ und ψ angesetzten Gleichungen sich

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - sin\,\psi}{1 + sin\,\psi}$$

(oder $\frac{r_1}{r_2}$ gleich dem reziproken Werte hievon) ergibt.

(Fig. 8.).

Der Kreis e der Zeichenebene (über $F_1 F_2$ als Durchmesser) ist die Umlegung des Kreises $\mathfrak{K}$ (um $F_1 F_2$) in die Zeichenebene; der auf $\genfrac{}{}{0pt}{}{\Psi}{\Psi'}$ konstante Winkel $\genfrac{}{}{0pt}{}{\psi}{\psi'}$ ist erkennbar im Winkel der Achse ξ mit der Tangente aus $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}$ an den Kreis $\mathfrak{K}$[1]), daher auch im Winkel der Achse ξ mit der Tangente $\genfrac{}{}{0pt}{}{N\,R}{N'\,R'}$ aus $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}$ an den Kreis e:

„Für $\genfrac{}{}{0pt}{}{P}{P'}$ und alle übrigen Punkte des Kreises $\genfrac{}{}{0pt}{}{\Psi}{\Psi'}$ ist die fokale Halbweite $\genfrac{}{}{0pt}{}{\psi}{\psi'}$ des zu ihm (als Scheitel) gehörigen Kegels über der Basis $\mathfrak{K}$ konstant und im Winkel $\genfrac{}{}{0pt}{}{\psi = \sphericalangle M\,N\,R}{\psi' = \sphericalangle M'\,N'\,R'}$ erkennbar; dagegen ist die zyklische Halbweite $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varphi}{\varphi'}$ des Kegels P ($\mathfrak{K}$) mit der Lage von $\genfrac{}{}{0pt}{}{P}{P'}$ auf $\genfrac{}{}{0pt}{}{\Psi}{\Psi'}$ veränderlich und abzulesen im Winkel

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\varphi = \sphericalangle P\,M\,N}{\varphi' = \sphericalangle P'\,M'\,N'}\text{“.}$$

[1]) Diese Tangente wird nämlich Fokalachse des Kegels $\genfrac{}{}{0pt}{}{P}{P'}\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathfrak{K})}{(\mathfrak{K})}$, wenn $\genfrac{}{}{0pt}{}{P}{P'}$ nach $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}$ rückt.

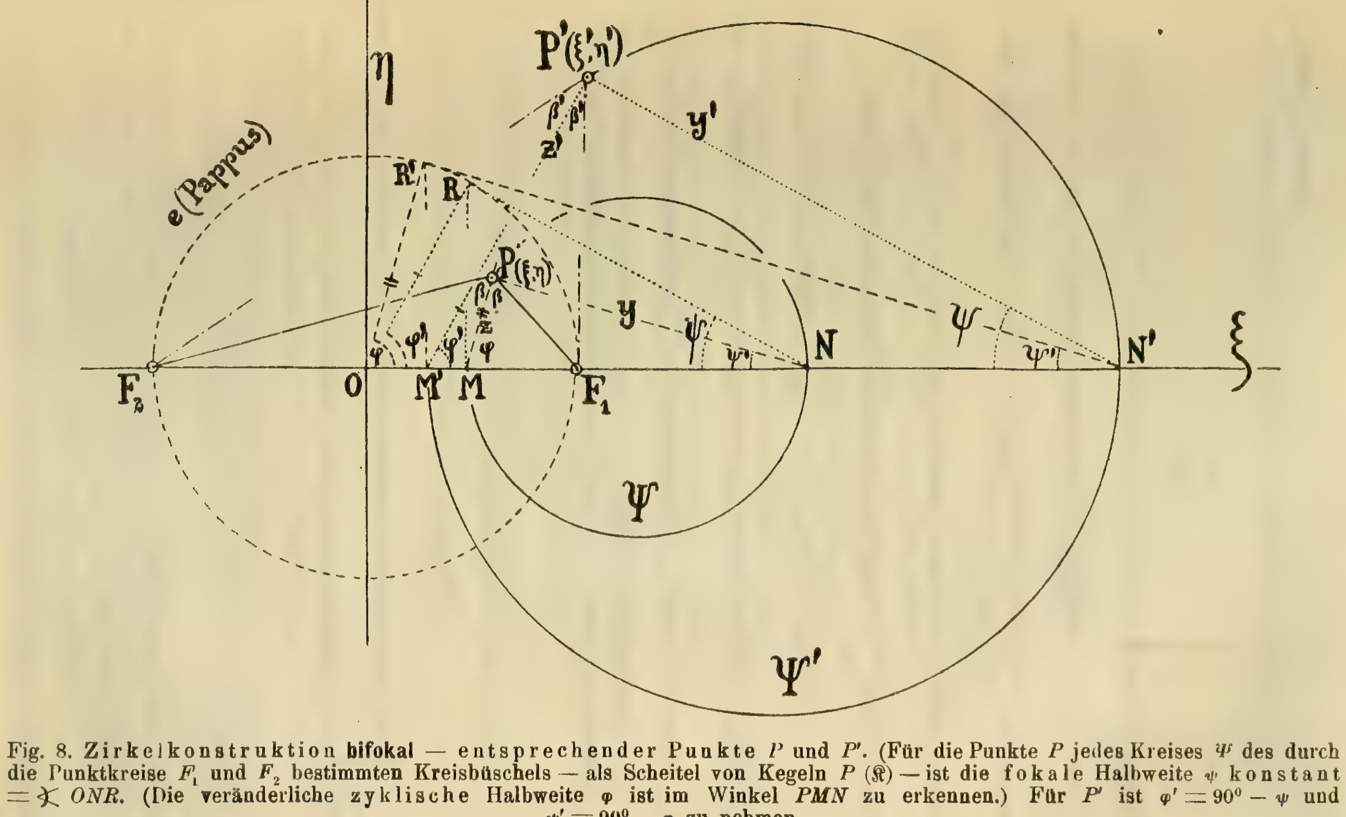


Fig. 8. Zirkelkonstruktion **bifokal** — entsprechender Punkte P und P'. (Für die Punkte P jedes Kreises Ψ des durch die Punktkreise F_1 und F_2 bestimmten Kreisbüschels — als Scheitel von Kegeln P ($\mathfrak{K}$) — ist die fokale Halbweite ψ konstant $= \sphericalangle\ ONR$. (Die veränderliche zyklische Halbweite φ ist im Winkel PMN zu erkennen.) Für P' ist $\varphi' = 90^0 - \psi$ und $\psi' = 90^0 - \varphi$ zu nehmen.

Will man den Kegelscheitel $\genfrac{}{}{0pt}{}{P}{P'}$ für einen bestimmten Wert von $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varphi \text{ und von } \psi}{\varphi' \text{ und von } \psi'}$ konstruieren, d. h. einen (reelen) Kegel so bestimmen, dass er eine gegebene fokale und eine gegebene zyklische Halbweite hat, so verschaffe man sich auf der ξ Achse jenen Punkt $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}$, aus welchem an den Kreis e (über $F_1 F_2$ als Durchmesser) eine Tangente $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}\genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R'}$ geht, welche mit der ξ Achse den Winkel $\genfrac{}{}{0pt}{}{\psi}{\psi'}$ einschliesst und ziehe dann durch denjenigen Punkt $\genfrac{}{}{0pt}{}{M}{M'}$ der ξ Achse welcher von $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}$ durch F_1 und F_2 harmonisch getrennt ist (und daher etwa als Fußpunkt des aus dem Berührungspunkte $\genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R'}$ der obigen Tangente mit e auf die ξ Achse gefällten Lotes konstruiert werden kann), eine Gerade unter dem Winkel $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varphi}{\varphi'}$ mit der ξ Achse und zu ihr durch $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{N'}$ ein Lot. Der Fußpunkt dieses Lotes ist schon der gesuchte Punkt $\genfrac{}{}{0pt}{}{P}{P'}$, der Scheitel des verlangten reellen Kegels über $\mathfrak{K}$ ($\eta = o$, $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$) als Basis, welcher zu den beiden gegebenen Halbweiten φ und ψ gehört.

Die sich für einen konstanten Wert von α und den zu ihm komplementären Wert von β und ebenso die sich für einen konstanten Wert von φ und den zu ihm komplementären Wert von ψ ergebenden Meridiankurven [Orte von Kegelscheiteln P (ξ, η) in der Zeichenebene] gehören bezüglich der Pole F_1 und F_2 als bifokale Bilder von einander zusammen, wie wir dies schon früher bezüglich der speziellen, in der Figur 3 verzeichneten Linien

f und e ($\alpha = 45^0$ bei f, $\beta = 45^0$ bei e)
h und g ($\varphi = 45^0$ bei h, $\psi = 45^0$ bei g)

bemerkt haben.

Analog wie soeben P für einen bestimmten Wert von φ und von ψ (in der Figur 8) und wie P für einen bestimmten Wert von α und β (in der Figur 6) konstruiert gedacht werden kann, ist es nach den Entwicklungen dieses Paragraphen leicht, mit Hilfe der entsprechenden Meridiankurven in der (ξ, η) Ebene den Punkt P aus

irgend zwei anderen gegebenen Stücken unter den fünf: $(\alpha, \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}, \beta, \varphi, \psi)$ zu konstruieren.

Die Angabe von β und ψ z. B. liefert P als Schnittpunkt eines Kreises des durch die Grundpunkte $F_1\,F_2$ bestimmten Büschels mit einem (den vorigen orthogonal schneidenden) Kreise Ψ des aus den Punktkreisen F_1 und F_2 linear ableitbaren Büschels.

§ 10.

Konstruktion bifokal entsprechender Punkte. Koordinatenberechnung hiezu.

Ist ein Kegel durch seine Basis $\mathfrak{K}$ ($\xi^2 + \zeta^2 = r^2$, $\eta = o$) und seine in den $\xi\eta$ Ebene beliebig angenommene Spitze P (ξ, η) gegeben, so ist der Scheitel P' (ξ', η') des zu dem ursprünglichen Kegel P ($\mathfrak{K}$) polarkongruenten Kegels über derselben Basis $\mathfrak{K}$ anzugeben. Mit anderen Worten (nach § 8): Wir haben zu P das — bezüglich der Pole F_1 und F_2 — **bifokale** Bild P' zu konstruieren.[1])

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen setzen uns in den Stand, auf mehrfache Art P' zu konstruieren.

Wir könnten etwa (Figur 6) durch P — entsprechend der Kegelformbestimmung aus α und β vorgehen und — erstens die Ellipse $\mathfrak{E}$ des Konfokalsystemes mit den Brennpunkten F_1 und F_2 legen, für deren Punkte (als Scheitel von Kegeln über $\mathfrak{K}$) die halbe sphärische Hauptachse α konstant und also gleich jenem Winkel ist, welchen die aus dem Hauptscheitel e von $\mathfrak{E}$ an ($\mathfrak{K}$, daher auch an) den Kreis e gelegte Tangente mit der ξ Achse bildet: Die durch F_1 zu dieser Tangente gelegte Parallele möge die η Achse im Punkte c' treffen. Der Kreisbogen, welcher c' mit F_1 und F_2 verbindet, sei mit $\mathfrak{C}'$ bezeichnet. Für alle Punkte dieses Kreisbogens $\mathfrak{C}'$ als Scheitel ist dann die halbe sphärische Nebenachse des Kegels über $\mathfrak{K}$ konstant: $\beta' = \sphericalangle\, O\, c'\, F_1 = 90^0 - \alpha$.

Legt man dann zweitens durch P, F_1 und F_2 den Kreis $\mathfrak{C}$, dessen Bogenteil $F_1\,P\,F_2$, für welchen [als Ort von Kegelscheiteln P ($\mathfrak{K}$)] β konstant ist; und welcher die η Achse in c schneiden möge ($\beta = \sphericalangle\, O\, c\, F_1$), legt dann parallel zu F_1 c an e eine Tangente, welche die ξ Achse in e' trifft, so ist die durch e' als Hauptscheitel bestimmte Ellipse $\mathfrak{E}'$ des Konfokalsystemes mit den Brennpunkten F_1 und F_2 der geometrische Ort aller Punkte, von denen (als Scheitel aus) $\mathfrak{K}$ durch Kegel mit dem konstanten Werte der halben Hauptachse α' projiziert wird; hiebei ist α' = dem Winkel der Tangente aus e' an e mit der ξ Achse ($\alpha' = 90^0 - \beta$). Da zufolge der Benützung der beiden oben genannten Parallelen $\alpha' = 90^0 - \beta$ und $\beta' = 90^0 - \alpha$ ist, liegt das bifokale Bild P' von P schon vor im Schnittpunkte von $\mathfrak{C}'$ mit $\mathfrak{E}'$.

---

[1]) Vgl. die Fußnote [1]) auf S. 30.

Dieser und anderen möglichen Konstruktionen des bifokalen Bildes P' eines beliebigen Punktes P ziehen wir indessen folgende Konstruktion vor, welche mit Lineal und Zirkel allein ausführbar ist: Figur 8.

Sie arbeitet — statt wie die vorige mit den beiden sphärischen Kegelachsen $\overset{\alpha}{\alpha'}, \overset{\beta}{\beta'}$, — mit den sphärischen Halbweiten, der zyklischen, $\overset{\varphi}{\varphi'}$, und der fokalen, $\overset{\psi}{\psi'}$, und schliesst sich an die im vorigen § 9 gegebene Kegelkonstruktion (aus φ und ψ) an. Da aus den Halbweiten φ und ψ, welche zu P gehören, jene Halbweiten φ' und ψ', welche zu P' gehören, gemäß den Gleichungen

$$\varphi' = 90^0 - \psi, \quad \psi' = 90^0 - \varphi$$

zu bestimmen sind und wir (nach § 9) P' aus φ' und ψ' mit dem Zirkel konstruieren können, verfahren wir wie folgt:

„Der Winkel bei P im charakteristischen Dreiecke $F_1 P F_2$ des gegeben Kegels $P(\mathfrak{K})$ habe zur inneren Winkelsymmetralen die Gerade z, deren Schnittpunkt mit der ξ Achse mit M, und zur äußeren Winkelsymmetralen die Gerade y, deren Schnittpunkt mit der ξ Achse mit N bezeichnet werden möge. Man ziehe im Quadranten des Punktes P bei dem (in der Dreiecksebene über $F_1 F_2$ als Durchmesser gezeichneten) Kreise e den Radius OR' parallel zu MP (d. h. zu z) und in R' die Kreistangente $R'N'$ bis zu ihrem Treffpunkte N' mit der ξ Achse.

Der Radius OR' von e möge zur orthogonalen Projektion auf die ξ Achse OM' haben. Man verzeichne nun jenen (im Quadranten von P gelegenen) Radius OR von e, welcher zur orthogonalen Projektion auf die ξ Achse OM hat. Dann liegt das gesuchte bifokale Bild P' des Punktes P vor im Schnittpunkte der durch M' zu OR gezogenen Parallelen z' $(= M'P')$ mit der durch N' zu NR gezogenen Parallelen y' $(= N'P')$."

Diese Konstruktion läßt die Vertauschbarkeit der bifokalen Beziehung zwischen P und P' deutlich hervortreten.

Um die Beziehung zwischen den Koordinaten (ξ, η) und (ξ', η'), bifokal (einander) entsprechender Punkte $P(\xi, \eta)$ und $P'(\xi', \eta')$ rechnerisch zu verfolgen, setzen wir der Kürze wegen

$$\left\{ \begin{array}{llll} tg^2\alpha = \mathfrak{x}, & tg^2\alpha' = \mathfrak{x}', & \dfrac{\xi^2}{r^2} = a, & \dfrac{\xi'^2}{r^2} = a' \\ tg^2\beta = \mathfrak{y}, & tg^2\beta' = \mathfrak{y}', & \dfrac{\eta^2}{r^2} = b, & \dfrac{\eta'^2}{r^2} = b' \end{array} \right\} \quad \ldots (7)$$

und haben dann aus den Gleichungen (6) des § 5 oder

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\xi^2}{r^2} &= a = \frac{(1+\mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})}{\mathfrak{x}^2}, & \frac{\xi'^2}{r^2} &= a' = \frac{(1+\mathfrak{x}')\,(\mathfrak{x}'-\mathfrak{y}')}{\mathfrak{x}'^2} \\ \underline{\frac{\eta^2}{r^2} = b = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2}} & ; & \frac{\eta'^2}{r^2} &= b' = \frac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{x}'^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (8)$$

mit Hilfe der aus $\begin{array}{l} \alpha' + \beta = 90^0 \\ \alpha + \beta' = 90^0 \end{array}$ folgenden Beziehungen $\begin{array}{l} tg^2\,\alpha' \cdot tg^2\,\beta = 1 \\ tg^2\,\alpha \cdot tg^2\,\beta' = 1 \end{array}$

oder
$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{x}'\,\mathfrak{y} = 1 \\ \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}' = 1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8')$$

ξ', η' durch ξ, η, d. h. also a' und b' durch a und b auszudrücken. Wir finden vorerst mit Rücksicht auf (8′)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\xi'^2}{r^2} &= a' = \frac{(1+\mathfrak{y})\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})}{\mathfrak{x}} \\ \underline{\frac{\eta'^2}{r^2} = b'} &\underline{= \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8'')$$

und erkennen durch Multiplikation der beiden unterstrichenen (unteren) Gleichungen unter (8) und (8″), daß

$$\frac{\eta^2\,\eta'^2}{r^4} = bb' = \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}\right)^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

gilt, daß also das Produkt $\eta\eta'$ der Ordinaten η und η' bifokal einander entsprechender Punkte P und P' nur von

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \frac{tg^2\,\beta}{tg^2\,\alpha} = sin^2\,\mathfrak{a} \quad \text{(Gl. } 6\,a \text{ im § 9)}$$

abhängt, also $\left[\right.$vgl. § 8 (Schlußbemerkung) und § 9 (unter $\frac{tg^2\,\beta}{tg^2\,\alpha} =$ $=$ konst.)$\left.\right]$ auf jeder Hyperbel $\mathfrak{H}$ des Konfokalsystemes mit den Brennpunkten F_1 und F_2 den festen, nur vom Winkel $\mathfrak{a}$ (der Asymptoten dieser Hyperbel mit der ξ Achse) gemäß

$$(\pm)\,\underline{\eta\,\eta'} = r^2 \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}\right)^{\frac{3}{2}} = r^2 \left(\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}\right)^3 = \underline{r^2\,sin^3\,\mathfrak{a}} \quad . \; . \; . \; . \; (9')$$

abhängigen Wert hat. Bezeichnet man die Koordinaten der reellen Schnittpunkte einer solchen Hyperbel mit der durch die Pole F_1 und F_2 (als ihre Spitzen, vgl. § 8 und die Fig. 3 und 5) bestimmten Koffeide k durch $\pm\,\xi_0$, $\pm\,\eta_0$, so hat man den eben angesetzten Wert $\pm\,\eta\,\eta' = r^2\,sin^3\,\mathfrak{a} = \eta_0^2$ und daraus [nach der Hyperbelgleichung

$\frac{\xi^2}{r^2 \cos^2 \alpha} - \frac{\eta^2}{r^2 \sin^2 \alpha} = 1$, welcher ξ_0, η_0 genügen müssen$\Big] \ldots \xi_0^2 =$ $= r^2 \cos^2 \alpha \, (1 + \sin \alpha)$, also in den laufenden Koordinaten ξ, η, welche wir hier wiederum statt ξ_0, η_0 setzen, jene Parametergleichungen der Koffeide k (der Ortes der autobifokalen Punkte der Ebene $[\xi, \eta]$ Fig. 3 und 5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \pm r \cos \alpha \sqrt{1 + \sin \alpha} \\ \eta = \pm r \sin \alpha \sqrt{\sin \alpha} \end{array} \right\}, \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

welche die Schnittpunkte dieser Linie mit jeder Hyperbel

$$\mathfrak{H} \ldots \frac{\xi^2}{r^2 \cos^2 \alpha} - \frac{\eta^2}{r^2 \sin^2 \alpha} = 1 \ldots \text{(α ist der Winkel der Hyperbelasymptoten mit der } \xi \text{ Achse)} \quad . (11)$$

des Konfokalsystemes $(F_1 F_2)$ ersichtlich machen.

Eine bequemere Parameterdarstellung der Koffeide soll im nächsten § 11 angeführt und zur Konstruktion der Fig. 5 benützt werden. Hier ist es für uns wichtig, daß wir auf jeder Hyperbel $\mathfrak{H}$ des Konfokalsystemes $(F_1 F_2)$ die 4 bezüglich der ξ und η Achse symmetrischen autobifokalen Punkte ($\pm \xi_0$, $\pm \eta_0$; Koffeidenpunkte) gemäß $\left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = r \cos \alpha \sqrt{1 + \sin \alpha} \\ \eta_0 = r \sin \alpha \sqrt{\sin \alpha} \end{array} \right\}$ konstruieren können und wissen, daß auf jeder solchen Hyperbel das Produkt $(\pm \eta \eta')$ der Ordinaten η, η' der bifokal einander entsprechenden Punkte konstant $= \eta_0^2$ ist.

Hiemit hat man eine Übersicht darüber gewonnen, wie sich alle bifokal entsprechenden Punkte (eigentlich die bezüglich der Achsen ξ, η symmetrischen Punktquadrupel) in der Ebene verteilen. Insbesondere auf der η Achse entspricht jedem Punkte P (und zugleich dem ihm bezüglich des Anfanges O symmetrischen Punkte) der von ihm durch die Schnittpunkte der η Achse mit dem Kreise e (beide sind in der Figur 3 mit P_I bezeichnet) harmonisch getrennte Punkt P' derselben Achse (sowie dessen Spiegelbild bezüglich O).

Z. B. die mit P^* bezeichneten beiden Punkte der η Achse in der Figur 3, die Scheitel der Umdrehungskegel Schröters über $\mathfrak{K}$ $(\xi^2 + \xi^2 = o, \ \eta = o)$ als Basis, entsprechen bifokal den beiden mit $P^{*\prime}$ bezeichneten Punkten der η Achse, den Scheiteln der Umdrehungskegel Monges über dem Basiskreise $\mathfrak{K}$

Auf der ξ Achse dagegen zeigen die bifokal entsprechenden Punkte folgendes merkwürdige Verhalten:

Dem Anfange O entspricht bifokal der unendlich ferne Punkt der η Achse. Bewegt sich ein Punkt P auf der ξ Achse von O bis zu einem der beiden Pole F_1 oder F_2 hin, so bewegt sich der bifokal entsprechende Punkt P' auf

der unendlich fernen Geraden der (ξ, η) Ebene als der Schnittpunkt dieser Geraden mit der durch P bestimmten Hyperbel $\mathfrak{H}$ des Konfokalsystemes $F_1 F_2$.

Rückt P in einen der beiden Punkte F_1 oder F_2 hinein, etwa nach F_1, so entspricht ihm als bifokales Bild P' jeder außerhalb der Strecke $F_1 F_2$ gelegene Punkt der Achse ξ und umgekehrt. P' nähert sich aber einem bestimmten außerhalb der Strecke $F_1 F_2$ gelegenen Punkte der ξ Achse[1]), wenn P sich dem Punkte F_1 unmittelbar von einer bestimmten Seite (in der Ebene) nähert: ($F_2 \frown F_1$, vgl. im § 9 bei $\beta =$ konst.) Geschieht dies so, daß der Winkel $\sphericalangle F_1 P F_2$ den Grenzwert 2β annimt, so hat P' auf der ξ Achse vom Anfange O (den Abstand r sec α', also, da $\alpha' = 90^0 - \beta$ ist) den Abstand r cosec β. Ist P genau in F_1, so ist P', wie schon gesagt, auf der Außenstrecke $F_1 F_2$ völlig unbestimmt. Rückt dagegen der Punkt P in derselben Richtung, in welcher er zu F_1 hin kam, weiterschreitend über F_1 hinaus, so daß $\sphericalangle F_1 P F_2$ sprungweise von 2β zum Werte $180^0 - 2\beta$ übergeht, so springt P' vom Punkte (r cosec β) zu jenem Punkte der Außenstrecke $F_1 F_2$, welcher von O die Entfernung r cosec $(90^0 - \beta) = r$ sec β ($= r$ cosec α') hat und geht von dort weiter[2]).

[Man mache sich dieses merkwürdige Verhalten klar an zwei bzl. der Achse ξ symmetrischen Kreisen, welche $F_1 F_2$ zur Sehne und über dieser Sehne den Peripheriewinkel 2β anf dem einen, bzw. $180^0 - 2\beta$ auf dem anderen Paare hrer symmetrischen, von F_1 und F_2 begrenzten Bogenteile haben. Dem zu $\begin{matrix} 2\beta \\ 180 - 2\beta \end{matrix}$ als Peripheriewinkel gehörigen symmetrischen Paare von Bogenteilen entspricht bifokal diejenige Ellipse des Konfokalsystemes $F_1 F_2$, deren große Halbachse $\begin{matrix} r \text{ cosec } \beta \\ r \text{ sec } \beta \end{matrix}$ ist.]

Nach dieser gewonnenen Übersicht über die Verteilung der bifokal einander entsprechenden Punkte $P(\xi, \eta)$ und $P'(\xi', \eta')$, zu welcher uns die Folgernngen aus Gl. (9), bezw. (9') befähigten, setzen wir unsere rechnenden Betrachtungen fort. —

Die Größe $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ der Gleichung (9) ist als $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \frac{tg^2 \beta}{tg^2 \alpha} = \sin^2 \mathfrak{a}$ leicht durch $a \left(= \frac{\xi^2}{r^2}\right)$ und $b \left(= \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}^2}\right)$, (Gl. 7) zu bestimmen, sie ist der Gl. (11) oder

$$\frac{a}{1 - \sin^2 \mathfrak{a}} - \frac{b}{\sin^2 \mathfrak{a}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11')$$

zu entnehmen als die positive Wurzel dieser für $\sin^2 \mathfrak{a}$ quadratischen Gleichung.

---

[1]) Von dem bezüglich O symmetrischen reden wir nicht, er ist stillschweigend mitgenommen.

[2]) Die Sprunglänge ist 0 für $2\beta = 90^0$, ∞ für $2\beta = 180^0$, sonst endlich und von Null verschieden. $2\beta = 90^0$, also keine Spurlänge des bifokalen Bildpunktes [$P' = N_1$ (und N_2) Fig. 3.] entspricht der Annäherung von P an F_1 auf Linien, die wie die Linien a, e, c, h der Fig. 3 die Achse ξ bei F_1 senkrecht durchsetzen.

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \frac{tg^2\,\beta}{tg^2\,\alpha} = \sin^2 a \text{ wird}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} &= \frac{1}{2}\left[-(a+b-1)+\sqrt{(a+b-1)^2+4b}\right]\\ &= (-\lambda_2),\end{aligned}\right\} \ldots . (12)$$

$$\left(a = \frac{\xi^2}{r^2}, b = \frac{\eta^2}{r^2}\right)$$

d. h. $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ ist auch (was auf das obige hinausläuft,) der absolute Wert $(-\lambda_2)$ der negativer Wurzel λ_2 der in λ quadratischen Gleichung (vgl. sie mit 11!)

$$\frac{\xi^2}{r^2(1+\lambda)} + \frac{\eta^2}{r^2\lambda} = 1 \text{ oder}$$

$$1 - \frac{a}{1+\lambda} - \frac{b}{\lambda} = o \text{ oder } f(\lambda) = \lambda(1+\lambda) - a\lambda - b(1+\lambda) = o, \ldots (13)$$

deren Wurzeln λ_1 (positiv) und λ_2 (negativ) die „elliptischen Koordinaten“ des Punktes P genannt werden.[1] . . . . (13′)

„$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$ ist der absolute Wert der zweiten (negativen) elliptischen Koordinate des Punktes P (ξ, η).“

Ist einmal $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ $(= -\lambda_2)$ aus (12) berechnet, so ist aus (9) sogleich

$$\frac{\eta'^2}{r^2} = b' = \frac{\lambda_2^3}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

und damit η' bekannt. Um noch a' $\left(= \frac{\xi'^2}{r^2}\right)$ zu finden, bilde man gemäß (8)

$$a' - a = \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}-1)}{\mathfrak{x}^2}$$

$$\text{und } b' - b = \frac{\mathfrak{y}\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}-1)}{\mathfrak{x}^2}$$

und ziehe die sich hieraus ergebende Gleichung $\frac{a'-a}{b'-b} = \frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} = -\lambda_2 - 1$ heran.[2]) Diese gibt ξ' an: $\frac{\xi'^2}{r^2} = a' = a + (\lambda_2+1)\left(\frac{\lambda_2^3}{b} + b\right)$ . . . . (14′)

---

[1]) $f(\lambda) = \lambda^2 - (a+b-1)\,\lambda - b = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$

wird für -1 positiv, „ „ 0 negativ, „ „ $+\infty$ positiv, hat also stets eine positive Wurzel $0 < \lambda_1 < +\infty$ und eine (zwischen Null und -1 gelegene) negative Wurzel . . . $-1 < \lambda_2 < 0$.

[2]) $\frac{a'-a}{b'-b}$ wird nur im Falle, daß $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 1$ ist, unbestimmt, für welchen Fall gemäß (8) und (8″) auch

Um zu einem beliebig gegebenen Punkte $P(\xi, \eta)$ den ihm bifokal entsprechenden Punkt $P'(\xi', \eta')$ koordinatenmäßig zu berechnen, kann man zuerst die negative Wurzel λ_2 der nur von ξ und η abhängigen Gleichung (13) bestimmen; dann ergibt sich η' aus (14), ξ' aus (14'). Bequemer ist aber, gleich beide Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gl. (13) zu bestimmen und daraus ξ' und η' abzuleiten. Vgl. die Fußnote auf der Seite 51.

§ 11.

Darstellung der bifokalen Beziehung in elliptischen Koordinaten. Die Koffeide.

In den beiden elliptischen Koordinaten λ_1 (positiv) und λ_2 (negativ), den Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung (13) stellt sich die bifokale Beziehung der Punkte $P(\xi, \eta)$ und $P'(\xi', \eta')$ besonders einfach dar.

Es seien λ_1, λ_2 die positive und die negative elliptische Koordinate von P, und λ'_1, λ'_2 die positive und die negative elliptische Koordinate von P'.

Der Vergleich von (13) mit:

(11) im § 10 lehrte schon, daß $-\lambda_2 = \sin^2 a$ sei,
(6*) im § 9 lehrt ebenso, „ $\lambda_1 = \operatorname{cotg}^2 \alpha$ ist. } . . (15)

Wir sahen schon, daß, λ_2 (und a) für P und P' dasselbe sei, da beide Punkte auf derselben Konfokalhyperbel liegen: $\lambda'_2 = \lambda_2, .. \mathrm{I}$ und suchen nun noch die Beziehung zwischen $\lambda_1 = \operatorname{cotg}^2 \alpha$ (15) und

$\lambda_1' = \operatorname{cotg}^2 \alpha' = tg^2 \beta$ (wegen $\alpha' + \beta = 90^0$).

Diese erhält man durch Multiplikation der eben angesetzten Werte:

$$\lambda_1 \lambda'_1 = \frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha} = \sin^2 a \quad \text{(Vgl. im § 9 Gl. 6}a.)$$
$$= -\lambda_2 \quad (\text{„ „ § 10 Gl. 12}).$$

---

die Gleichungen $\left\{ \begin{array}{l} a' = a = \dfrac{(\mathfrak{x}+1)(\mathfrak{x}^2-1)}{\mathfrak{x}^3} \\ b' = b = \dfrac{1}{\mathfrak{x}^3} \end{array} \right\}$ . . . . (10')

bestehen, so daß P mit P' zusammenfällt. Diese Gleichungen (10') geben im Wesen dieselbe Darstellung der Koffeide wie die Gleichungen (10). Es zeigt sich hier durch Vergleichung von (10) mit (10'), daß für die Punkte der Koffeide die Gleichung gilt: $(\frac{1}{\mathfrak{x}} =) \operatorname{cotg}^2 \alpha = (\pm) \sin a$, ... (10'')

welche im Wesen mit der Koffeidengleichung III des folgenden § 11 gleichbedeutend ist.

Die Gl. I. und $\lambda_1 \lambda_1' = -\lambda_2$ . . . . II,
oder zusammengefaßt

(I., II.) $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 \lambda_1' + \lambda_2 = o \\ \lambda_2' = \lambda_2 \end{matrix}\right\}$ sind die überaus einfachen Gleichungen der **bifokalen** Beziehung in elliptischen Koordinaten: „Bifokal einander entsprechende Punkte haben die gleiche zweite (negative) elliptische Koordinate. Das Produkt ihrer ersten (positiven) elliptischen Koordinaten ist dem absoluten Werte der zweiten (negativen) Koordinate gleich."

Insbesondere ergibt sich durch Gleichsetzung von λ_1 mit λ_1' die in elliptischen Koordinaten geschriebene Gleichung der Koffeide:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2 = o \; ^{1)} \; . . \text{III.}$$

„Bei Punkten der Koffeide ist das Quadrat der ersten (positiven) elliptischen Koordinate dem absoluten Werte der negativen (zweiten) elliptischen Koordinate gleich."

Die Konstruktion der Koffeide (Figur 5), für welche $\alpha + \beta = 90^0$ und daher auch $\varphi + \psi = 90^0$ gilt, gestaltet sich bedeutend einfacher, wenn man statt des Parameters α [oder a wie in den Gl. 10, (10′, 10″)] den Parameter ψ oder φ heranzieht.

Wir haben im § 9 gelernt (S. 38), wie man P aus φ und ψ konstruiert. Zieht man zu einer beliebigen Tangente des Kreises e (über $F_1 F_2$ als Durchmesser), z. B. jener im Punkte R, (welche die Achse ξ in N treffen möge), das Lot MP aus dem Schnittpunkte M der Achse ξ mit der zu ihr durch R gelegten Senkrechten, so sind für den Punkt P (ξ, η) als Scheitel nach den Entwicklungen des § 9 die Winkel ψ und φ im

$$\psi = \sphericalangle MNR$$
$$\varphi = \sphericalangle PMN \text{ (hier auch} = \sphericalangle RON)$$

abzulesen. Da diese aber hier komplementär ausfallen — ohne daß P auf der Achse η liegt, d. h. ohne daß $\varphi = 90^0$, $\psi = o$ ist[2]) —, liegt P auf der Koffeide und wandert auf ihr, wenn R sich auf dem Kreise e bewegt:

(Figur 5.) „Um eine Koffeide mit den reellen Spitzen F_1 und F_2 zu konstruieren, projiziere man den Berührungspunkt R einer beliebigen Tangente des über $F_1 F_2$ als Durchmesser bestimmten Kreises e orthogonal auf diesen Durchmesser $F_1 F_2$ nach M; der Fußpunkt P des aus M auf die ursprüngliche Tangente gefällten Lotes ist stets ein Punkt dieser Koffeide."

---

[1]) Diese Gleichung bedeutet zufolge (15) dasselbe wie die Gleichung (10″) in der vorigen Fußnote.

[2]) Aus (3′) und (5′) in § 2 folgt, daß bei $\varphi + \psi = 90^0$ entweder $\alpha + \beta = 90^0$ oder $\alpha = \beta$, d. h. $\varphi = 90^0$, $\psi = o$ sein muß, d. h. P auf der Koffeide oder auf der η Achse liegt.

Sofort kann man aus dieser Konstruktion der Figur 5 die folgende bequemere Parameterdarstellung der Koffeide k entnehmen

$$\left\{\begin{array}{l}\xi = r\cos\varphi\,(1+\sin^2\varphi) = r\cos\varphi\;(2-\cos^2\varphi)\\ \eta = r\sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi) = r\sin^3\varphi\end{array}\right\}^{1)} \quad \ldots (15)$$

Für $tg^2\varphi = \frac{1}{2}$ $\left(\varphi = \beta^*\right.$, vgl. § 7, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, § 10) ergibt sich ein Punkt[2] $P_{III}\Big)$ $\left(\frac{4}{9}\sqrt{6}\,r,\ \frac{1}{9}\sqrt{3}\,r\right)$, dessen zur η Achse parallele Tangente $\left(\xi = \frac{4}{9}\sqrt{6}\,r\right)$ k noch in einem (zum vorigen bzl. der ξ Achse symmetrischen) Punkte (P_{III}) berührt[3]); man bemerkt hier die beiden Doppeltangenten der Koffeide: $\xi = \pm\frac{4}{9}\sqrt{6}\,r$.

Es sei dem Leser überlassen, die oben vorgebrachte Konstruktion der Koffeide auch in der folgenden Fassung zu beweisen:

„Die Koffeide ist der Ort desjenigen Punktes auf jeder Tangente eines Kreises e, in welchem ein von einem (bzw. jedem) der beiden Endpunkte eines festen Durchmessers F_1F_2 herkommender Lichtstrahl an dieser Tangente nach dem gewöhnlichen Reflexionsgesetze derart zurückgeworfen wird, dass er zum anderen Endpunkte dieses Durchmessers, weiter geht." Oder:

„Spiegelt man einen Endpunkt eines festen Kreisdurchmessers F_1F_2 an einer beliebigen Tangente des Kreises und verbindet das

---

[1]) Der Vergleich dieser Gl. (16) mit (10) und (10″) lehrt, daß für die Koffeide die Beziehung $cotg^2\alpha = (\pm)\sin\alpha = \sin^2\varphi$ gilt, wie auch direkt leicht zu zeigen ist.

[2]) Vgl. die Fußnote 1 auf S. 30.

[3]) Wenn man auf k jene Punkte sucht, in denen die Koffeidentangente zur η Achse parallel ist, so braucht man nur aus der ersten der Gl. (16) d. h. $\left(\frac{\xi^2}{r^2} = a,\ \cos^2\varphi = C \text{ gesetzt,}\right)$ aus der ersten der Gl. $\left\{\begin{array}{l} a = C\,(2-C)^2 \\ b = (1-C)^3 \end{array}\right\}$ . . . . (16′) $a = C^3 - 4C^2 + 4C$ und hieraus $\frac{\partial a}{\partial C} = 3C^2 - 8C + 4$ zu bilden und dann $\frac{\partial a}{\partial C}$ gleich Null zu setzen. Dies führt (da die andere der beiden Wurzeln der sich ergebenden quadratischen Gleichung $3C^2 - 8C + 4 = 0$, nämlich $\left(C = 2\right.$, welche zu $\left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -1 \end{array}\right\}$ d. h. zum Doppelpunkte $\left\{\begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = \pm ri \end{array}\right\}$ führt (S. 52), nicht in Betracht kommt$\Big)$ zu $C = \cos^2\varphi = \frac{2}{3}$. $\left(tg^2\varphi = \frac{1}{2},\ \varphi = \beta^* \text{ vgl. § 7}\right)$; dieser Wert von C führt nach (16′) zu $\left\{\begin{array}{l} a = \frac{\xi^2}{r^2} = \frac{32}{27} \\ b = \frac{\eta^2}{r^2} = \frac{1}{27} \end{array}\right\}$ d. h. zu $\left\{\begin{array}{l} \xi = \pm\frac{4}{9}\sqrt{6}\,r \\ \eta = \pm\frac{1}{9}\sqrt{3}\,r \end{array}\right\}$, den oben angeführten Koordinaten der Punkte P_{III}.

Spiegelbild mit dem anderen Endpunkte des Durchmessers, so trifft die Verbindungsgerade die Tangente in einem Punkte der durch die Spitzen F_1 und F_2 bestimmten Koffeide."

Die Gleichung der Koffeide in den gewöhnlichen Kartesischen Koordinaten ist aus jener in elliptischen Koordinaten (III) leicht abzuleiten: Setzt man in der Identität

$$f(\lambda) = \lambda(1+\lambda) - a\lambda - b(1+\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad \ldots \text{(vgl. 13)}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda = -1, \text{ so erhält man } & a = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2), \\ \lambda = 0, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & b = \quad -\lambda_1\lambda_2, \end{array}\right\} \text{ oder}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a + b - 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \quad -b \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

jene Gleichungen, welche den Übergang zwischen den elliptischen und den gewöhnlichen Koordinaten $\left\{\frac{\xi^2}{r^2} = a, \frac{\eta^2}{r^2} = b,\right.$ § 10 Gl. 7 vermitteln.[1])

Setzt man den aus der ersten Gleichung unter (17) folgenden Wert

$$\lambda_2 = -\lambda_1 + a + b - 1$$

in die zweite unter (17) und ebenso in die Gleichung III der Koffeide $\lambda_1^2 + \lambda_2 = 0$ (S. 49) ein, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1^2 - (a+b-1)\lambda_1 - b = 0 \\ \lambda_1^2 - \quad \lambda_1 + a + b - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (18)$$

aus denen λ_1 zu eliminieren ist. Die Subtaktion der letzten Gleichungen liefert

$$(a+b-2)\lambda_1 + (a+2b-1) = 0 \quad \ldots (19a)$$

Multipliziert man die erste der beiden Gl. (18) mit $(a+b-1)$. die zweite mit b, addiert dann beide und kürzt durch λ_1, so hat man

$$(a+2b-1)\lambda_1 - [(a+b-1)^2 + b] = 0 \quad \ldots (19b)$$

Das Ergebnis der Elimination von λ_1 aus (19a) und (19b) ist aber schon die gesuchte Gleichung

$$\left|\begin{array}{ll} a+b-2 & , \quad a+2b-1 \\ a+2b-1 & , -[(a+b-1)^2+b] \end{array}\right| = o \text{ oder}$$

$$(a+b)^3 - 3a^2 - 3ab + b^2 + 3a - b - 1 = 0; \quad \ldots\ldots (20)$$

[1]) Diese Gleichungen machen die Berechnung der Koordinaten $(\xi'\ \eta')$ des bifokalen Bildes $F'\ (\xi, \eta)$ eines beliebig gegebenen Punktes $P\ (\xi, \eta)$ bequem, sobald man sich die beiden elliptischen Koordinaten von P, d. h. die Wurzeln λ_1 (positiv) und λ_2 (negativ) der Gleichung 13 (deren Koeffizienten nur von ξ, η abhängen) und sodann aus diesen nach I, II $\left\{\begin{array}{l} \lambda'_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ (\lambda'_2 = \lambda_2) \end{array}\right\}$ bestimmt hat. Es ist dann einfach gemäss (17):

$$\left|\begin{array}{l} \xi' = \pm r\sqrt{(1+\lambda'_1)(1+\lambda'_2)} = \pm r \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \eta' = \pm r\sqrt{-\lambda'_1\lambda'_2} = \pm r \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}}. \end{array}\right|,$$

d. h., wenn man in ihr ausführlich ξ, η ersichtlich machen will,

$$\left(\frac{\xi^2}{r^2} = a, \frac{\eta^2}{r^2} = b, \text{ § 10 Gl. 7}\right):$$

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 - 3r^2\xi^4 - 3r^2\xi^2\eta^2 + r^2\eta^4 + 3r^4\xi^2 - r^4\eta^2 - r^6 = 0 \ldots (20')$$

(20') ist die gewöhnliche Gleichung der Koffeide k. Sie zeigt, daß diese Linie neben ihre beiden (reellen) Spitzen F_1 und F_2 $(\xi = \pm r, o)$, in denen die ξ Achse Spitzentangente ist, noch in den unendlich-fernen Kreispunkten $(\xi^2 + \eta^2 = o)$ Spitzen besitzt und zwar mit der unendlich-fernen Geraden als gemeinsamer Spitzentangente. Letztere ist also als eine (isolierte) reelle Doppeltangente der Koffeide k anzusehen.

Die Koffeide ist eine Kurve von der sechsten Ordnung. Sie ist auch von der sechsten Klasse[1]), da sie außer den vier erwähnten Spitzen noch sechs imaginä1e Doppelpunkte mi den Koordinaten

$$\begin{Bmatrix} a = o \\ b + 1 = o \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} (a = 3)^2 = o \\ (b + 1)^2 = o \end{Bmatrix} \text{ d. h. } \begin{Bmatrix} \xi = o \\ \eta = \pm r i \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \xi = \pm r\sqrt{3} \\ \eta = \pm r i \end{Bmatrix}$$

besitzt.

Schreibt man nämlich die Gleichung (20) der Koffeide in der Form

$$b^3 + (3a + 1)\, b^2 + (3a^2 - 3a - 1)\, b + (a - 1)^3 = o,$$

$$\text{oder } \begin{Bmatrix} 3a + 1 = A_1 \\ 3a^2 - 3a - 1 = A_2 \\ (a - 1)^3 = A_3 \end{Bmatrix} \text{ gesetzt,}$$

$$b^3 + A_1 b^2 + A_2 b + A_3 = o,$$

so ist die Diskriminante dieser Gleichung

$$\varDelta = 4A_2^3 - A_1^2 A_2^2 - 18 A_1 A_2 A_3 + 27 A_3^2 + 4 A_1^3 A_3$$
$$= 27a^4 - 194a^3 + 435a^2 - 288a = a(27a - 32)(a - 3)^2.$$

$\varDelta$ verschwindet außer für $a = \frac{32}{27}$, was (vgl. S. 50 bei der Fußn. 3.) den reellen Doppeltangenten $\xi = \pm \frac{4}{9}\sqrt{6}\, r$ in den Punkten P_{III} entspricht (zwei Werte von η fallen für diesen ξ Wert in $\eta = \pm \frac{1}{9}\sqrt{3}\, r$ zusammen), nur noch, wenn entweder $a = o$ oder $(a - 3)^2 = o$ ist, was zu den obigen Doppelpunkten führt.

Die Koffeide besitzt ferner sechs Doppeltangenten, nämlich die unendlich ferne Gerade, die ξ Achse, die Doppeltangenten $\xi = \pm \frac{4}{9}\sqrt{6}\, r$ in den mit P_{III} bezeichneten Punkten $\left(\pm \frac{4}{9}\sqrt{6}\, r,\right.$

[1]) Alle 6 Tangenten aus einem reellen unendlich fernen Punkte z. B. sind reell; unter ihnen befindet sich die unendlich ferne Gerade, welche für 2 Tangenten zählt, während die übrigen 4 reellen Tangenten paarweise bezüglich des Anfanges O symmetrisch liegen.

$\pm \frac{1}{9} \sqrt{6}\, r\Big)$ und außer diesen reellen vier Doppeltangenten noch die beiden imaginären

$$\frac{b}{a} = -\frac{27}{32} \text{ d. h. } \frac{\eta}{\xi} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\, i$$

durch den Anfang O (das Symmetriezentrum von k) gelegten.

Setzt man nämlich, um die Schnittpunkte der Koffeide mit der durch O gelegten Geraden zu übersehen, in der Gleichung (20) $b = \lambda\, a$, so daß (20) in

$$a^3 (1 + \lambda)^3 + a^2 (-3 - 3\lambda + \lambda^2) + A(3 - \lambda) - 1 = o$$

übergeht, so ist die Diskriminante $\Delta\lambda$ dieser Gleichung,

$$\Delta\lambda = 4 B_2^3 - B_1^2 B_2^2 - 18 B_1 B_2 B_3 + 27 B_3^2 + 4 B_1^3 B_3,$$

$$\text{wenn } \left\{ \begin{aligned} \lambda - 3 &= B_1 \\ -(\lambda^2 - 3\lambda - 3) &= B_2 \\ -(\lambda + 1)^3 &= B_3 \end{aligned} \right\} \text{ gesetzt wird, d. h.}$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= o \cdot \lambda^6 + 288\lambda^5 + 435\lambda^4 + 194\lambda^3 + 27\lambda^2 \\ &= \lambda^2 (3\lambda + 1)^2 (32\lambda + 27). \end{aligned}$$

$\Delta\lambda$ verschwindet außer dort, wo es wegen der getroffenen Doppelpunkte verschwinden muß, d. h. außer für

$\lambda = \infty$ entsprechend den Doppelpunkten $(o, \pm r i)$ der η Achse (λ^6 erhielt den Koeffizienten Null)

$\lambda^2 = o$ entsprechend den Spitzen $(\pm r, o)$ mit der ξ Achse als Spitzentangente

$(3\lambda + 1)^2 = o$ entsprechend den Doppelpunkten $\left(\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -1 \end{aligned} \text{ d. h.}\right)$ $\xi = \pm r \sqrt{3}$, $\eta = \pm r i$ nur noch für $32\lambda + 27 = o$. Die diesem letzteren Werte $\left(-\frac{27}{32}\right)$ von λ entsprechenden Geraden $\left(b = -\frac{27}{32} a\right)$ sind die beiden oben angegebenen (außer der Doppeltangente ξ noch) durch O gehenden Doppeltangenten.

Außer dem hat die Koffeide gemäß den bekannten Plücker-schen Formeln noch vier imaginäre Wendetangenten.

§ 12.

Einteilungen der reellen Kreiskegel.

Wir haben (im § 8) anschließend an die Betrachtung der bifokalen Beziehung in der Meridianebene (ξ, η) des festen Kreises $\mathfrak{K}$ und an die Betrachtung der Koffeide k als des Ortes der Scheitel P von „mittleren" Kegeln über dem Kreise $\mathfrak{K}$ (als Basis) die Kreiskegel in

„scharfe" ($\alpha + \beta < 90^0$, $\varphi + \psi \underset{(=)}{<} 90^0$)[1] und

[1]) $\varphi + \psi = 90^0$ bei scharfen Kegelformen **nur** dann, wenn $\varphi = 90^0$, $\psi = o$, $\alpha = \beta < 45^0$, also bei scharfen Drehkegeln. Vgl. § 8.

„flache" ($\alpha + \beta > 90^0$, $\varphi + \psi \underset{(=)}{\geq} 90^0$)[1]) einteilen können, von denen die ersteren / letzteren zu Scheiteln P gehören, welche in der Meridianebene (ξ, η) außerhalb / innerhalb der Koffeide k gelegen sind (Figur 3), wobei die mittleren Kegel

$$(\alpha + \beta = 90^0,\ \varphi + \psi = 90^0)$$

die Grenze zwischen den scharfen und den flachen Formen bilden.

Nun knüpfen wir an jede der Typen (a, b, . . . h) Reye-s (vgl. § 4 und hiezu stets die Figur 3) und an die zugehörige Meridiankurve $a, b \ldots h$ (analog wie im § 8 an k) eine Einteilung der reellen Kreiskegel und damit aller Hyperboloide, für deren Form ja doch ihr Asymptotenkegel maßgebend ist.[2])

---

a) Wird ein Kegel zweiter Ordnung von einer zu einer Kegelkante senkrechten Ebene (durch den Scheitel) in zwei zu einander senkrechten Kanten geschnitten, so wird er von allen (durch den Scheitel gelegten) Ebenen, die zu irgend einer Kegelkante senkrecht stehen, in einem Rechtwinkelpaare von Kegelkanten geschnitten[3]); er ist dann ein

gleichseitiger Kegel Schröters,

b) Gehen an einen Kegel zweiter Klasse (zweiter Ordnung) durch ein (von Scheitel ausgehendes) Lot zu einer Tangentialebene zwei zu einander senkrechte Tangentialebenen, so gehen durch alle (vom Scheitel ausgehenden) Lote zu den Tangentialebenen des Kegels Rechtwinkelpaare von Tangentialebenen[4]); der Kegel ist ein solcher

Monge-s,

---

[1]) $\varphi + \psi = 90^0$ bei flachen Kegelformen **nur** dann, wenn $\varphi = 90^0$, $\psi = o$ $\alpha = \beta > 45^0$, also bei flachen Drehkegeln. Vgl. § 8.

[2]) Die Namen der speziellen Kegeltypen können, wenn ein solcher Kege Asymptotenkegel ist, ohneweiteres auf das Hyperboloid übertragen werden wie dies z. B. bei den Schröterschen (gleichseitigen) und bei den orthogonalen Hyperboloiden schon üblich ist.

[3]) Ist ein Kegelschnitt S einem Polardreieck eines anderen Kegelschnittes S umschrieben [vgl. bei a) nach der Tabelle des § 4], so kann seine Gleichung bezüglich dieses Polar- als Koordinaten-Dreieckes in homogenen Punktkoordinaten so geschrieben werden, dass in ihr nur die Koordinatenprodukte vorkommen, die Quadrate aber fehlen, während bei der in homogenen Linienkoordinaten geschriebenen Gl. von S' die Koordinatenprodukte fehlen und nur die Quadrate der Koordinaten vorkommen; es ist also die Bedingung dafür erfüllt, dass S dem Kegelschnitte S' harmonisch eingeschrieben ist. (Die Summe gewisser Koeffizientenprodukte verschwindet. Vgl. etwa in Grace and Young, The Algebra of Invariants, Cambridge 1903, p. 299.)

[4]) Beweis wie bei der vorigen Fußnote, dual.

gehörig zur Meridiankurve a (Ellipse) in der Fig. 3 als dem Orte der in der Zeichenebene (ξ, η) gelegenen Kegelscheitel P über dem Basiskreise $\mathfrak{K}$.

Alle übrigen Kegel sind entweder

„spitz“ oder „stumpf“,

wenn man mit „spitz“ / „stumpf“ jene Kegel bezeichnet, bei welchen der in den Innenraum des Kegels[1] fallende Winkel der Schnittlinien des Kegels mit einer zu einer Kante desselben senkrechten Ebene spitz / stumpf ist: Ist dieser Winkel spitz / stumpf bei einer solchen Ebene, so ist er es auch bei allen derartigen (d. h. zu irgend einer Kegelkante senkrechten) Ebenen.[2]

Zu diesen spitzen Winkeln zählen hiebei auch die verschwindenden oder imaginären Kantenwinkel in folgendem Sinne: Wenn die Normalebene zu einer Kegelkante den Kegel entlang einer Kante berührt oder den Kegel gar nicht in reellen Kanten schneidet, so ist der Kegel „spitz“, d. h. es kann keine Normalebene zu irgend einer seiner Kanten ihn in einem Kantenpaare der-

gehörig zur Meridiankurve b (Kreis) in der Fig. 3 als dem Orte der in der Zeichenebene gelegenen Scheitel von Kegeln über $\mathfrak{K}$.

Alle übrigen Kegel sind entweder

„eng“ oder „weit“,

wenn man mit „eng“ / „weit“ jene Kegel bezeichnet, welche im spitzen / stumpfen Raumteil zwischen jenen beiden Tangentialebenen gelegen sind, die man durch das (vom Scheitel ausgehende) Lot zu irgend einer Tangentialebene an den Kegel legen kann: Ist dieser Winkel spitz / stumpf bei einem solchen Lote (zu einer Tangentialebene), so ist er es auch bei jedem.[3]

Zu diesen stumpfen Winkeln zählen hiebei auch die von 180° oder die imaginären Ebenenwinkel in folgendem Sinne: Wenn das Lot zu einer Tangentialebene eines Kegels auf den Kegel fällt, oder innerhalb desselben, so ist der Kegel den „weiten“ zuzuzählen, d. h. es kann kein Lot zu irgend einer seiner Tangentialebenen bei ihm geben, aus welchem Tangential-

---

[1]) Innenraum ist der Raumteil, durch dessen Punkte keine reellen Tangentialebenen an den Kegel gehen, also jener, in welchem die „innere“ Achse z des Kegels verläuft.

[2]) Aus Gründen der Stetigkeit, weil der Grenzfall eines rechten Winkels nicht eintreten kann; denn wäre ein solcher Winkel ein rechter, so wären es alle (vgl. die Fussnote 3 der vorigen Seite), der Kegel müsste ein „Schröterscher“ sein, was aber wiederum das Auftreten anderer als rechter Winkel (als Winkel der beiden Schnittkanten des Kegels mit einer Normalebene zu irgendeiner seiner Kanten) ausschlöße.

[3]) Analog, dual zur Betrachtung in der vorigen Fußnote zu beweisen.

art durchsetzen, daß der in den Innenraum des Kegels fallende Winkel dieses Kantenpaares ein stumpfer (oder rechter) wäre. —

In der Zeichenebene ξ, η der Figur 3 erfüllen die Scheitel der spitzen/stumpfen Kegel über $\mathfrak{K}$ ($\xi^2 + \zeta^2 = r^2$, $\eta = o$) den außerhalb/innerhalb der Ellipse a gelegenen Teil der Ebene.

e) Kegel des *Pappus* nannten wir im § 4 jene, deren *Nebenachse* $2\beta = 90^0$ ist.

Die Ebenen durch die Polstrahlen der zyklischen Ebenen eines solchen Kegels schneiden diesen in einem *rechtwinkeligen* Kantenpaare.

Der Polarkegel eines solchen Kegels (ein Kegel des *Hachette*, dem man den gleichen Scheitel gibt), berührt den Kegel längs der Nebenscheitelkanten.

Der Ort der Scheitel P von Kegeln des Pappus über $\mathfrak{K}$ ($\xi^2 + \zeta^2 = r^2$, $\eta = o$) ist in der Zeichenebene (ξ, η) der Figur 3 der Kreis e.

Jeder Kegel zweiter Ordnung, welcher kein Kegel des *Pappus* ist, ist entweder „neben-schmal" ($\beta < 45^0$) oder „neben-breit" ($\beta > 45^0$).

Die Scheitel der ersteren/letzteren Kegel über $\mathfrak{K}$ liegen in der Figur 3 außerhalb/innerhalb des Kreises e.

Bei jedem **neben-schmalen** Kegel *existieren* Kanten, zu welchen es keine senkrechten reellen Kanten auf dem Kegel gibt.

ebenen an den Kegel gingen, deren Winkel — gemessen in jenem Raumteile zwischen den Ebenen, wo der Kegel liegt — ein spitzer (oder rechter) wäre. —

In der Zeichenebene der Figur 3 liegen die Scheitel der engen/weiten Kegel (über dem Kreise $\mathfrak{K}$) außerhalb/innerhalb des Kreises b.

f) Kegel des *Hachette* nannten wir im § 4 jene, deren *Hauptachse* $2\alpha = 90^0$ ist.

Durch die (vom Scheitel ausgehenden) Strahlen in den Polarebenen der Fokalachsen eines solchen Kegels gehen an den Kegel zwei zu einander *senkrechte* Tangentialebenen.

Der Polarkegel eines solchen Kegels (ein Kegel des *Pappus*, dem man den gleichen Scheitel gibt,) berührt den Kegel längs der *Haupt*scheitelkanten.

Der Ort der Scheitel P von Kegeln des *Hachette* über dem Kreise $\mathfrak{K}$ ist in der Zeichenebene (ξ, η) der Fig. 3 die Ellipse f.

Jeder Kegel zweiter Klasse (zweiter Ordnung), welcher kein Kegel des *Hachette* ist, ist entweder „haupt-schmal" ($\alpha < 45^0$) oder „haupt-breit" ($\alpha > 45^0$).

Die Scheitel der ersteren/letzteren Kegel über $\mathfrak{K}$ liegen in der Figur 3 außerhalb/innerhalb der Ellipse f.

Bei jedem **haupt-breiten** Kegel *existieren* Tangentialebenen desselben, zu welchen es keine senkrechten reellen Tangentialebenen auf dem Kegel gibt.

Sie bilden ein zusammenhängendes Gebiet, welches durch zwei getrennte reelle Grenzkanten zusammenhängt mit jenem anderen Gebiete von Kanten dieses Kegels, zu denen auch senkrechte reelle Kanten auf dem Kegel vorkommen, falls dieses andere Gebiet existiert, d. h. bei den haupt-breiten[1]) Kegeln unter den betrachteten (neben-schmalen[2]). Existiert letzteres dagegen nicht, [bei den haupt-schmalen[3]) Kegeln unter den betrachteten (neben-schmalen) fehlt es in der Tat,] so gibt es nur solche Kanten auf dem neben-schmalen Kegel, zu denen keine reellen senkrechten Kanten auf dem Kegel vorkommen.

Bei jedem **neben-breiten** Kegel gibt es zu jeder Kante zwei getrennte reelle, zu ihr senkrechte Kanten desselben Kegels.

c) Orthogonal nannten wir im § 4. solche Kegel, bei denen das aus dem Scheitel auf eine der beiden zyklischen Ebenen gefällte Lot eine Kante des Kegels ist. ($\sin^2 \alpha = tg^2 \beta$).

Fällt dieses Lot zur zyklischen Ebene bei einem Kegel in den

Sie bilden ein zusammenhängendes Gebiet, welches durch zwei getrennte reelle Grenz- Tangentialebenen zusammenhängt mit jenem anderen Gebiete von Tangentialebenen dieses Kegels, zu welchem auch senkrechte Tangentialebenen um Kegel vorkommen, falls dieses andere Gebiet existiert, d. h. bei den neben-schmalen[1]) Kegeln unter den betrachteten haupt-breiten.[2]) Existiert letzteres dagegen nicht [bei den neben-breiten[3]) Kegeln unter den betrachten (haupt-breiten) fehlt es in der Tat,] so gibt es nur solche Tangentialebenen auf dem haupt-breiten Kegel, zu deren keine reellen senkrechten Tangentialebenen auf dem Kegel vorkommen.

Bei jedem **haupt-schmalen** Kegel gibt es zu jeder Tangentialebene zwei getrennte reelle, zu ihr senkrechte Tangentialebenen desselben Kegels.

d) Als Kegel Reyes bezeichneten wir in § 4 jene Kegel, bei denen die durch den Scheitel zu einer der beiden Fokalachsen senkrecht gelegte Ebene den Kegel berührt ($cotg^2\alpha = cos^2\beta$).

Schneidet dagegen bei einem Kegel diese zu einer Fokalachse

---

[1]) Vgl. in der anderen Spalte daneben, wo dieser Begriff erklärt ist.

[2]) Die zugleich neben-schmalen ($\beta < 45^0$) und haupt-breiten ($\alpha > 45^0$) Kegel haben ihre bifokalen Bilder P in der Figur 3 in der schmalen (von der Koffeide k in zwei Teile zerlegten) Zone zwischen den Linien e und f in der Figur, der „**Mittelzone**". [Innerhalb dieser „Mittelzone" liegen z. B. auch die Bilder der höher-speziellen Kegel dh (orthozyklischer Kegel Reyes) und cg (orthofokaler Orthogonalkegel.]

[3]) Auf den Kegeln P ($\mathfrak{K}$) dieser „Mittelzone", den „mittelnahen" Kegeln ($\alpha > 45^0$, $\beta <$) 45^0 und nur auf solchen gibt es reelle Kanten, welche senkrecht stehen zu Tangentialebenen desselben Kegels, (sog. „Grenzkanten") u. zw. 4 symmetrisch liegende solche Kanten, wenn P nicht auf der Zonengrenze liegt, d. h. nicht auf e oder auf f.

Außen- / Innen- raum desselben, so nennen wir den Kegel „überhängend“ / „geböscht“
($\sin^2 \alpha > tg^2 \beta$).
($\sin^2 \alpha < tg^2 \beta$).

Jeder nicht-orthogonale Kegel ist entweder überhängend oder geböscht:

Geben wir ihm zur Basis den Kreis $\mathfrak{K}$ ($\xi^2 + \zeta^2 = r^2, \eta = o$), so befindet sich der Scheitel eines überhängenden / geböschten Kegels in der (ξ, η) Ebene außerhalb / innerhalb des zwischen den beiden parallelen Geraden c der Figur 3 gelegenen Parallelstreifens.

(Bei den überhängenden / geböschten Kegeln gibt es 2 / 0 reelle, zu den zyklischen Ebenen senkrechte Tangentialebenen.)

h) Kegel mit zu einander senkrechten zyklischen Ebenen nannten wir im § 4 orthozyklisch.

Alle übrigen Kegel, bei denen die zyklische Halbweite $\varphi \lesseqgtr 45^0$ ist, können „schmal-zyklisch“ / „breit-zyklisch“ genannt werden.

Die in der Meridianebene (ξ, η) des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegenen Scheitel schmal- / breit-zyklischer Kegel mit $\mathfrak{K}$ als Basis liegen innerhalb / außerhalb der gleichseitigen Hyperbel h der Figur 3.

senkrechte Ebene den Kegel in zwei reellen Kanten / nicht, so soll der Kegel „eingreifend“ / „ausweichend“
($cotg^2\alpha < cos^2 \beta$) / $cotg^2 \alpha > cos^2 \beta$) genannt werden.

Jeder Kegel, der nicht von Typus Reyes ist, ist entweder eingreifend oder ausweichend:

Geben wir ihm Basis den Kreis $\mathfrak{K}$, so befindet sich der Scheitel eines eingreifenden / ausweichenden Kegels in der (ξ, η) Ebene der Figur 3 innerhalb / außerhalb der Lemniskate d.

(Bei den eingreifenden / ausweichenden Kegeln gibt es 2 / 0 reelle, zu den Fokalachsen senkrechte Kanten.)

g) Kegel mit zu einander der senkrechten Fokalachsen nannten wir im § 4 orthofokal.

Alle übrigen Kegel, bei denen die fokale Halbweite $\psi \lesseqgtr 45^0$ ist, können „schmal-fokal“ / „breit-fokal“ genannt werden.

Die in der Meridianebene (ξ, η) des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegenen Scheitel von schmal- / breit-fokalen Kegeln über der Basis $\mathfrak{K}$ liegen außerhalb beider / innerhalb eines der beiden Kreise g der Figur 3.

Gehört ein Kegel keiner der Typen $a, b, \ldots h$ Reyes an, so liegt in der Figur 3 sein Scheitel in der Zeichenebene (ξ, η) auf keiner der mit den entsprechenden Buchstaben $a, b \ldots h$ bezeichneten Linien. Diese Linien grenzen in jedem Quadranten Gebietsteile ab, innerhalb welcher alle Eigenschaften der zu den Punkten des Gebietsteiles [als Scheiteln P von Kegeln über $\mathfrak{K}$] gehörigen Kegel, soweit sie sich durch die Beiworte

a) spitz $(cotg^2\alpha + cotg^2\beta > 1)$ oder stumpf $(cotg^2\alpha + cotg^2\beta < 1)$	*b*) eng $(tg^2\alpha + tg^2\beta < 1)$ oder weit $(tg^2\alpha + tg^2\beta > 1)$
e) neben-schmal $(\beta < 45^0)$ oder neben-breit $(\beta > 45^0)$	*f*) hauptschmal $(\alpha < 45^0)$ oder haupt-breit $(\alpha > 45^0)$
c) überhängend $(\sin^2\alpha > tg^2\beta)$ oder geböscht $(\sin^2\alpha < tg^2\beta)$	*d*) ausweichend $(cotg^2\alpha > cos^2\beta)$ oder eingreifend $(cotg^2\alpha < cos^2\beta)$
h) schmalzyklisch $(\varphi < 45^0)$ oder breitzyklisch $(\varphi > 45^0)$	*g*) schmalfokal $(\psi < 45^0)$ oder breitfokal $(\psi > 45^0)$

kennzeichnen lassen, die gleichen bleiben.[1]) Die folgende genau nach einem Quadranten der Figur 3 zusammengestellte Tabelle gibt eine Übersicht darüber, welche dieser Eigenschaften bei Kegeln eines solchen Gebietsteiles zusammen vorkommen können, also mit einander verträglich sind. Die den drei an der Hauptdiagonale dieser Tabelle (von links oben bis rechts unten) angeordneten Rubriken entsprechenden Gebietsteile enthalten u. a. auch die Scheitel der „mittleren“ (oder zu sich selbst polar-kongruenten) Kegel, da sie in der Figur 3 von der Koffeide durchzogen werden, welche sie in zwei Teile zerlegt, von denen der eine zu „scharfen“ $(\alpha + \beta < 90^0)$, der andere zu „flachen“ $(\alpha + \beta > 90^0)$ Kegelformen (vgl. § 8) gehört. Die übrigen Gebietsteile, repräsentiert durch Rubriken auf der einen Seite der Hauptdiagonale, gehören durchwegs zu scharfen, dagegen gehören die durch Rubriken auf der anderen Seite der Hauptdiagonale (in der

---

[1]) Auch diese charakteristischen Beiworte können von einem (nichtspeziellen) Kegel ohneweiteres auf das (zu ihm als Asymptonenkegel gehörige) Hyperboloid übertragen werden (wie die speziellen Typennamen, vgl. bei der Fußnote 2 auf S. 54.

Tabelle) repräsentierten Gebietsteile zu flachen Kegelformen Die Gebietsteile, welche bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch angeordneten Rubriken entsprechen, gehören zu polarkongruenten Kegeln; die Punkte des einen Gebietsteiles sind bifokale Bilder der Punkte des anderen.

Inhaltsübersicht:

(Nach S. 60. sind die Tabellen zum § 12 und § 6 angeschlossen.)

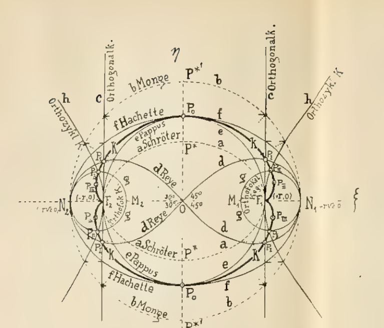


Tabelle zum § 6.

Die dreizehn höher-speziellen (nicht ausgearteten reellen) **Kegel zweiter Ordnung**, welche zweien der Reye-schen Typen zugleich angehören.

$\alpha \geq \beta$ sind die Halbachsen des sphärischen Kegelschnittes bei jedem der Kegel, φ und ψ sind die Winkel der zyklischen Ebenen, bzw. die Fokalachsen mit der inneren Kegelachse z. (φ heißt die „zyklische“, ψ die „fokale“ Halbweite des Kegels.)

	a) Schrötersche Kegel. Linie a. ($cotg^2\alpha + cotg^2\beta = 1$) ↓	e) Pappus-Kegel. Linie e ($tg^2\alpha > tg^2\beta = 1$) ↓	c) Orthogonal-kegel. Linie c. ($cotg^2\beta - cotg^2\alpha = 1$) ↓	h) Orthozyklische Kegel. Linie h. ($cotg^2\beta - cotg^2\alpha = 1$) ↓	
b) Monge-sche Kegel. Linie b. ($tg^2\alpha + tg^2\beta = 1$) →	(ab) Nicht reell.	(eb) Nicht reell.	(cb) Orthogonalkegel Monge's. (†) $tg^2\alpha = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ ($tg\,2\alpha = 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$) $\alpha = 38^\circ 10' 21{\cdot}8''$ | $tg^2\beta = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ ($tg\,2\beta = 2$, $tg\,\beta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$) $\beta = 31^\circ 43' 2{\cdot}9''$ $tg^2\varphi = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ $\varphi = 58^\circ 16' 57{\cdot}1''$ | $tg^2\psi = \frac{1}{10}(-5+3\sqrt{5})$ $\psi = 22^\circ 27' 19{\cdot}9''$ $[\xi = \pm r,\ \eta = \pm r]$ (†) ↓	(hb) Orthozyklischer Kegel Monge's. $tg^2\alpha = -1+\sqrt{3}$ ($tg\,2\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})}$) $\alpha = 40^\circ 33' 1''$ | $tg^2\beta = 2-\sqrt{3}$ ($tg\,2\beta = \sqrt{2}$) ($\beta = \frac{1}{2}\alpha^*$ vgl. bei hg) $\beta = 27^\circ 22' 4{\cdot}1''$ $tg^2\varphi = 1$ $\varphi = 45^\circ$ | $tg^2\psi = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$ $\psi = 31^\circ 10' 26{\cdot}2''$ $[\xi = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{6},\ \eta = +\frac{1}{2}r\sqrt{2}]$	b) Mongesche Kegel ← (Mit ∞^1 umschriebenen dreifach-rechtwinkeligen Triedern.)
f) Hachettesche Kegel Linie f. ($1 = tg^2\alpha > tg^2\beta$) →	(af) Nicht reell.	(ef) Pappus-Hachette-scher Kegel. Zugleich Umdrehungskegel. $tg^2\alpha = 1$ ($tg\,2\alpha = \infty$) $\alpha = 45^\circ$ | $tg^2\beta = 1$ ($tg\,2\beta = \infty$) $\beta = 45^\circ$ $\varphi = 90^\circ$ | $\psi = 0^\circ$ $P_0[\xi = 0,\ \eta = \pm r]$ $\alpha = \beta$	(cf) Orthogonalkegel Hachette's. $tg^2\alpha = 1$ ($tg\,2\alpha = \infty$) $\alpha = 45^\circ$ | $tg^2\beta = \frac{1}{2}$ ($tg\,2\beta = 2\sqrt{2}$) ($\beta = \beta^*$ vgl. bei hg) $\beta = 35^\circ 15' 51{\cdot}8''$ $tg^2\varphi = 2$ ($\varphi = \alpha^*$ vgl. bei hg) $\psi = 54^\circ 44' 8{\cdot}2''$ | $tg^2\psi = \frac{1}{3}$ $\psi = 30^\circ$ $[\xi = \pm r,\ \eta = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{2}]$	(hf) Orthozyklischer Kegel Hachette's $tg^2\alpha = 1$ ($tg\,2\alpha = \infty$) $\alpha = 45^\circ$ | $tg^2\beta = \frac{1}{3}$ $tg\,2\beta = \sqrt{3}$ $\beta = 30^\circ$ $tg^2\varphi = 1$ $\varphi = 45^\circ$ | $tg^2\psi = \frac{1}{2}$ ($\psi = \beta^*$ vgl. bei hg) $\psi = 35^\circ 15' 51{\cdot}8''$ $[\xi = \pm\frac{2}{3}r\sqrt{3},\ \eta = \pm\frac{1}{3}r\sqrt{3}]$ $\varphi = \alpha$	f) Hachettesche Kegel. ← $\alpha = 45^\circ$. (Die Haupt-Scheitelkanten zu einander senkrecht.)
d) Reye's Kegel Linie d. ($tg^2\alpha - tg^2\beta = 1$) →	(ad) Schröter-Reye-scher Kegel. $tg^2\alpha = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ ($tg\,\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $tg\,2\alpha = -2$) $\alpha = 58^\circ 16' 57{\cdot}1''$ | (*) $tg^2\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ $tg\,2\beta = -2\sqrt{2+\sqrt{5}}$) $\beta = 51^\circ 49' 38{\cdot}2''$ $tg^2\varphi = \frac{1}{2}(5+3\sqrt{5})$ $\varphi = 67^\circ 32' 40{\cdot}1''$ | $tg^2\psi = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ $\psi = 31^\circ 43' 2{\cdot}9''$ $[\xi = \pm r\sqrt{5-2\sqrt{5}},\ \eta = \pm r\sqrt{-2+\sqrt{5}}]$ (*)	(ed) Pappus-Reye-scher Kegel $tg^2\alpha = 2$ ($tg\,2\alpha = -2\sqrt{2}$) ($\alpha = \alpha^*$ vgl. bei hg) $\alpha = 54^\circ 44' 8{\cdot}2''$ | $tg^2\beta = 1$ ($tg\,2\beta = \infty$) $\beta = 45^\circ$ $tg^2\varphi = 3$ $\varphi = 60^\circ$ | $tg^2\psi = \frac{1}{2}$ ($\psi = \beta^*$ vgl. bei hg) $\psi = 35^\circ 15' 51{\cdot}8''$ $[\xi = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{3},\ \eta = \pm\frac{1}{2}r]$	(cd) Orthogonalkegel Reye's. (*) $tg^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ($tg\,2\alpha = -2\sqrt{2+\sqrt{5}}$) $\alpha = 51^\circ 49' 38{\cdot}2''$ | (†) $tg^2\beta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ ($tg\,2\beta = 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$) $\beta = 38^\circ 10' 21{\cdot}8''$ $tg^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ $\varphi = 51^\circ 49' 38{\cdot}2''$ | $tg^2\psi = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ $\psi = 38^\circ 10' 21{\cdot}8''$ $P_I[\xi = \pm r,\ \eta = \pm r\sqrt{-2+\sqrt{5}}]$ $\varphi = \alpha$ | $\psi = \beta$ ↑ (†)	(hd) Orthozyklischer Kegel Reye's $tg^2\alpha = \sqrt{2}$ ($tg\,2\alpha = -2\sqrt{4+3\sqrt{2}}$) $\alpha = 49^\circ 56' 22{\cdot}7''$ | $tg^2\beta = -1+\sqrt{2}$ ($tg\,2\beta = \sqrt{2(1+\sqrt{2})}$) $\beta = 32^\circ 45' 54{\cdot}4''$ $tg^2\varphi = 1$ $\varphi = 45^\circ$ | $tg^2\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\psi = 40^\circ 3' 37{\cdot}3''$ $[\xi = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{2(1+\sqrt{2})},\ \eta = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{2(-1+\sqrt{2})}]$	d) Reye's Kegel. ← $\psi = 90^\circ - \alpha$.
g) Orthofokal-kegel. Linie g. ($tg^2\alpha - 2\,tg^2\beta = 1$) →	(ag) Schröter's Orthofokalkegel $tg^2\alpha = 2+\sqrt{3}$ ($tg\,2\alpha = -\sqrt{2}$) ($\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha^*$ vgl. bei hg) $\alpha = 62^\circ 37' 55{\cdot}9''$ | $tg^2\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ [$tg\,2\beta = -\sqrt{\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})}$] $\beta = 49^\circ 26' 59''$ $tg^2\varphi = 1+\sqrt{3}$ $\varphi = 58^\circ 49' 33{\cdot}8''$ | $tg^2\psi = 1$ $\psi = 45^\circ$ $[\xi = \pm\frac{1}{2}r(3\sqrt{2}-\sqrt{6}),\ \eta = \pm r\sqrt{\frac{1}{2}(-5+3\sqrt{3})}]$ ↑ a) Schröter sche Kegel, (Mit ∞^1 eingeschriebenen dreifach-rechtwinkeligen Triedern.)	(eg) Pappus-scher Orthogonalkegel $tg^2\alpha = 3$ ($tg\,2\alpha = -\sqrt{3}$) $\alpha = 60^\circ$ | $tg^2\beta = 1$ ($tg\,2\beta = \infty$) $\beta = 45^\circ$ $tg^2\varphi = 2$ ($\varphi = \alpha^*$ vgl. bei hg) $\varphi = 54^\circ 44' 8{\cdot}2''$ | $tg^2\psi = 1$ $\psi = 45^\circ$ $[\xi = \pm\frac{2}{3}r\sqrt{2},\ \eta = \pm\frac{1}{3}r]$ ↑ $\psi = \beta$ e) Pappus-Kegel. $\beta = 45^\circ$. (Die Neben-Scheitelkanten zu einander senkrecht.)	(cg) Orthogonaler Orthofokalkegel. $tg^2\alpha = 1+\sqrt{2}$ ($tg\,2\alpha = -\sqrt{2}$) $\alpha = 57^\circ 14' 5{\cdot}6''$ | $tg^2\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($tg\,2\beta = 2\sqrt{4+3\sqrt{2}}$) $\beta = 40^\circ 3' 37{\cdot}3''$ $tg^2\varphi = \sqrt{2}$ $\psi = 49^\circ 56' 22{\cdot}7''$ | $tg^2\psi = 1$ $\psi = 45^\circ$ $[\xi = \pm r,\ \eta = \pm r\sqrt{-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}}]$ ↑ c) Orthogonal-kegel. $\varphi = 90^\circ - \beta$.	(hg) Orthozyklischer Orthofokalkegel $tg^2\alpha = 2$ ($tg\,2\alpha = -2\sqrt{2}$) $\alpha = \alpha^*$ $\alpha = 54^\circ 44' 8{\cdot}2''$ | $tg^2\beta = \frac{1}{2}$ $tg\,2\beta = 2\sqrt{2}$ ($\beta = \beta^* = 90^\circ - \alpha^*$) $\beta = 35^\circ 15' 51{\cdot}8''$ $tg^2\varphi = 1$ $\varphi = 45^\circ$ | $tg\,\psi = 1$ $\psi = 45^\circ$ $P_{II}[\xi = \pm\frac{3}{4}r\sqrt{2},\ \eta = \pm\frac{1}{4}r\sqrt{2}]$ $\varphi = \psi$ ↑ h) Orthozyklische Kegel. ($\varphi = 45^\circ$)	g) Orthofokal-kegel. ← ($\psi = 45^\circ$) $\left\{\begin{matrix}\alpha + \beta = 90^\circ\\ \varphi + \psi = 90^\circ\end{matrix}\right\}$

Die in dieser Tabelle symmetrisch zur Hauptdiagonale ╲ angesetzten Kegel haben komplementäre Werte von α (bei dem einen) und β (bei dem anderen), ebenso bzl. φ und ψ. Bei den in der Hauptdiagonale selbst angesetzten Kegeln ist $\alpha + \beta = 90^\circ$ und $\varphi + \psi = 90^\circ$. („Mittlere“ Kegel.) Die beiden Größen ξ, η in der untersten Zeile (bei jedem der höher-speziellen Kegel) bedeuten die Abstände des Kegelscheitels von der Achse (Mittelpunktssenkrechten) und von der Ebene des auf dem Kegel gelegenen Kreises vom Radius r

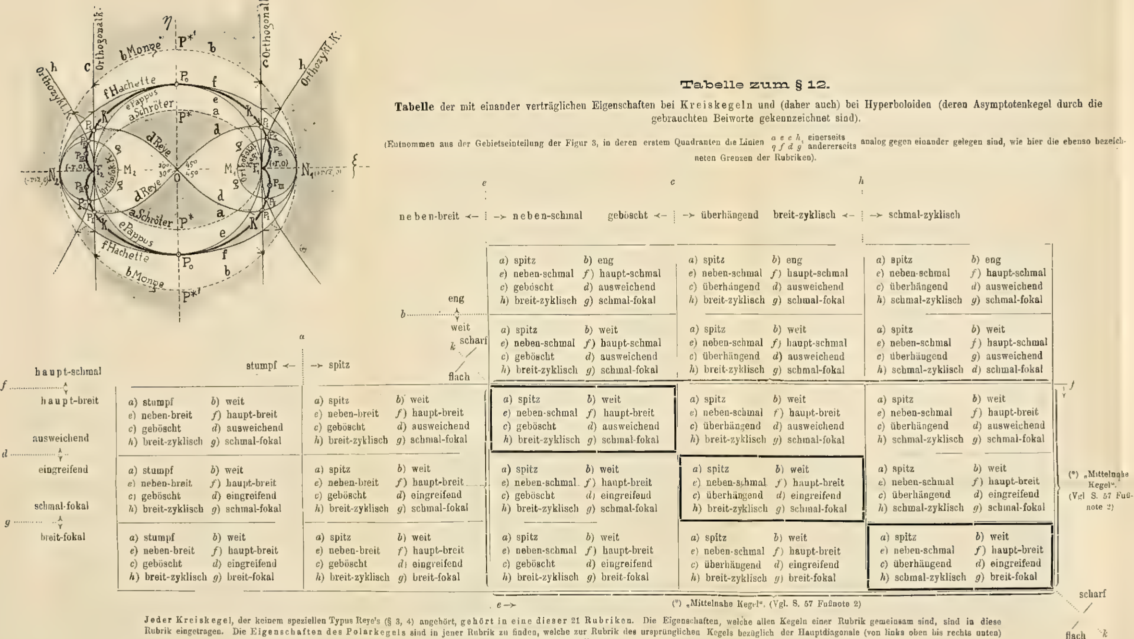


Tabelle zum § 12.

Tabelle der mit einander verträglichen Eigenschaften bei Kreiskegeln und (daher auch) bei Hyperboloiden (deren Asymptotenkegel durch die gebrauchten Beiworte gekennzeichnet sind).

(Entnommen aus der Gebietseinteilung der Figur 3, in deren erstem Quadranten die Linien $\begin{matrix} a & e & c & h \\ g & f & d & g \end{matrix}$ einerseits / andererseits analog gegen einander gelegen sind, wie hier die ebenso bezeichneten Grenzen der Rubriken).

	stumpf ←– ⁞ *a*	⁞ –→ spitz; neben-breit ←– ⁞ *e*	⁞ –→ neben-schmal; geböscht ←– ⁞ *c*	⁞ –→ überhängend; breit-zyklisch ←– ⁞ *h*	⁞ –→ schmal-zyklisch
eng			*a*) spitz *b*) eng *e*) neben-schmal *f*) haupt-schmal *c*) geböscht *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) eng *e*) neben-schmal *f*) haupt-schmal *c*) überhängend *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) eng *e*) neben-schmal *f*) haupt-schmal *c*) überhängend *d*) ausweichend *h*) schmal-zyklisch *g*) schmal-fokal
b ↕ weit; *k* scharf / flach; haupt-schmal			*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-schmal *c*) geböscht *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-schmal *c*) überhängend *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-schmal *c*) überhängend *d*) ausweichend *h*) schmal-zyklisch *g*) schmal-fokal
f ↕ haupt-breit; ausweichend	*a*) stumpf *b*) weit *e*) neben-breit *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-breit *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) überhängend *d*) ausweichend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) überhängend *d*) ausweichend *h*) schmal-zyklisch *g*) schmal-fokal
d ↕ eingreifend; schmal-fokal	*a*) stumpf *b*) weit *e*) neben-breit *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-breit *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) überhängend *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) schmal-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) überhängend *d*) eingreifend *h*) schmal-zyklisch *g*) schmal-fokal
g ↕ breit-fokal	*a*) stumpf *b*) weit *e*) neben-breit *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) breit-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-breit *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) breit-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) geböscht *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) breit-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) überhängend *d*) eingreifend *h*) breit-zyklisch *g*) breit-fokal	*a*) spitz *b*) weit *e*) neben-schmal *f*) haupt-breit *c*) überhängend *d*) eingreifend *h*) schmal-zyklisch *g*) breit-fokal

(*) „Mittelnahe Kegel". (Vgl. S. 57 Fußnote 2)

scharf / flach *k*

Jeder Kreiskegel, der keinem speziellen Typus Reye's (§ 3, 4) angehört, gehört in eine dieser 21 Rubriken. Die Eigenschaften, welche allen Kegeln einer Rubrik gemeinsam sind, sind in diese Rubrik eingetragen. Die Eigenschaften des Polarkegels sind in jener Rubrik zu finden, welche zur Rubrik des ursprünglichen Kegels bezüglich der Hauptdiagonale (von links oben bis rechts unten) symmetrisch liegt.

V.

Einige Eigenschaften der Oskulationstripel am Kegelschnitte.

Von
Dr. K. Zahradník.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. April 1910.)

H. STEINER[1]) hat bewiesen, dass durch jeden Punkt t eines Kegelschnittes drei Krümmungskreise gehen, deren Oskulationspunkte u_1, u_2, u_3 mit dem Punkte t auf einem Kreise liegen. Das Oskulationsdreieck $u_1\, u_2\, u_3$ hat unabhängig vom Punkte t, dem es zugeordnet ist einen konstanten Flächeninhalt mit dem Schwerpunkte im Mittelpunkte des Kegelschnittes.[2])

Im folgendem füge ich einige weitere Eigenschaften der Oskulationstripel bei.

α) Die Normalen des Oskulationstripels schneiden sich in einem Punkte.

Sind

$$x = \frac{2p}{u^2 - q},\; y = \frac{2pu}{u^2 - q} \tag{1}$$

die Gleichungen des Kegelschnittes, so erhalten wir die Parameter des dem Punkte t zugeordneten Oskulationstripels als Wurzeln der Gleichung

$$u^3 + 3tu^2 + 3qu + qt = 0. \tag{2}$$

---

[1]) STEINERS Werke Bd. 2 pg. 377.

[2]) Steiner ibid. ZAHRADNÍK: Oskulationstripel am Kegelschnitte, Grunert-Hoppes Archiv f. Math. und Phys. 1883.

Die Parameter eines Oskulationstripels genügen somit den Relationen

$$(u)_1 = -3t, \ (u)_2 = 3q, \ (u)_3 = -qt, \tag{3}$$

wo wir mit $(u)_h$ Kombinationen h-ter Ordnung der Wurzeln bezeichnen. Die Gleichung der Normalen N_h des Kegelschnittes im Punkte u_h ist

$$N_h \equiv 2\,(u_h^2 - q)\,u_h\,x + (u_h^4 - q^2)\,y - 2pu_h(u_h^2 + q) - 4pu_h = 0, \tag{4}$$

und die Normalen N_1, N_2, N_3 eines Oskulationstripels u_1, u_2, u_3 schneiden sich in einem Punkte, da

$$|2\,(u^2 - q)u, u^4 - q^2, - 2pu\,(u^2 + q) - 4pu| =$$
$$- 8p\,(q + 1)\,|u\,u^3\,u^4| + 8pq^2\,(q + 1)\,|1\,u\,u^3| =$$
$$8p\,(q + 1)\,|1\,u\,u^2|\,\{-(u)_2\,(u)_3 + q^2\,(u)_1\} = 0$$

ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (3).

β) Das Dreieck der dem Oskulationstripel entsprechenden Krümmungsmittelpunkte hat konstanten Flächeninhalt.

Ist S_h das Zentrum des im Punkte u_h des Kegelschnittes oskulierenden Kreises, so entspricht dem Oskulationsdreiecke $u_1\ u_2\ u_3$ das Dreieck der Krümmungsmittelpunkte $S_1\ S_2\ S_3$. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes S des Punktes u sind[1])

$$x = p\,\frac{(q + u^2)^3 + 2\,(3u^4 + q^2)}{(u^2 - q)^3}$$

$$y = -8p\,(q + 1)\left(\frac{u}{u^2 - q}\right)^3.$$

Bezeichnen wir mit D den Flächeninhalt des Dreieckes $S_1\ S_2\ S_3$ so ist

$$D = \frac{-4p^2\,(q + 1)}{\prod\limits_1^3 (u_h{}^2 - q)^3} \cdot \left| (q + u^2)^3 + 2\,(3u^2 + q), u^3, (u^2 - q)^3 \right|$$

Führen wir nun mit den Gl. (3) die Bedingung ein, dass das Dreieck $S_1\ S_2\ S_3$ dem Oskulationsdreiecke $u_1\ u_2\ u_3$ entspricht, so erhalten wir

---

[1]) Em. Weyr: Über razionale Curven. Sitzb. d. kg. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften Prag 18/10 1872 pg. 35 des Separatabdruckes.

$$D = \frac{8 \cdot 36\, p^2 q^3 (q+1)^2 (t^2 - q)^2 \triangle}{\prod\limits_1^3 (u_h^2 - q)^2},$$

und da

$$\prod_1^3 (u_h^2 - q) = 16 q^2 (t^2 - q)^3$$

$$\triangle = |1\, u\, u^2| = 6\,(t^2 - q)\sqrt{-3q}$$

ist, folgt, dass

$$D = \frac{3^3}{4^3} \frac{p^2 (q+1)^2}{q^3} \sqrt{-3q} \qquad (5)$$

ist, somit konstant für alle Oskulationsdreiecke.

Da nun auch das Oskulationsdreieck d einen konstanten Flächeninhalt

$$d = \frac{3}{4} \frac{p^2}{q^2} \sqrt{-3q}$$

besitzt, so ist auch das Verhältnis der Dreiecke D und d konstant, nämlich

$$\frac{D}{d} = \frac{9}{16} \cdot \frac{(q+1)^2}{q}, \qquad (6)$$

und ist nur vom Verhältnisse der Achsen des Kegelschnittes abhängig.

γ) Es sei H der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Normalen eines dem Kegelschnittspunkte t entsprechenden Oskulationstripels und u, u_1, u_2, u_3 das Fusspunktsquadrupel des Normalen des Punktes H. Nach dem Satze des Joachimsthal[1]) schneidet der Umkreis der drei Fusspunkte $u_1\, u_2\, u_3$ den Kegelschnitt in einem Punkte, der dem vierten Fusspunkte u diametral liegt. Ist nun $u_1\, u_2\, u_3$ ein Oskulationstripel, so ist t der Schnittpunkt des Umkreises des Oskulationsdreieckes mit dem Kegelschnitte, somit liegt der dem Oskulationsdreiecke zugeordnete Punkt t diametral dem Fusspunkte u der vierten Normalen des Punktes H.

Die Koordinaten des gemeinschaftlichen Schnittpunktes H der Normalen eines Oskulationstripels erhalten wir aus der Bemerkung, dass H der Schnittpunkt von je zwei der Normalen ist, somit

---

[1]) Joachimsthal: Crelle Journal 26 Bd. pg. 175.

$N_1/N_2 \equiv N_2/N_3 \equiv N_3/N_1$ mit Berücksichtigung der Relationen (3) oder nachstehend.

Zwischen den Parametern der Normalenfusspunkte eines Punktes gelten (Gl. 4) nachstehende Relationen

$$\Sigma u = \frac{2(p-x)}{y} \qquad \Sigma uu = 0$$
$$\Sigma uuu = 2\,\frac{q(p+x)+2p}{y} \qquad \Sigma uuuu = -q. \tag{7}$$

Sind nun u_1, u_2, u_3 Parameter eines Oskulationstripels, das dem Punkte t zugeordnet ist, dann entspricht das Fusspunktsquadrupel dem Punkte H, dessen Koordinaten wir mit ξ, η bezeichnen wollen. Mit Rücksicht auf die Relationen (3) geht die zweite und vierte Gleichung von (7) in

$$ut = q \tag{8}$$

über, was uns die bekannte Tatsache ausdrückt, dass der vierte Fusspunkt u der Normalen des Punktes H dem Punkte t, welchem das Oskulationsdreieck zugeordnet ist, diametral liegt. Die erste und dritte Gleichung gehen über in

$$u - 3t = \frac{2(p-\xi)}{\eta}$$
$$3u - t = 2\,\frac{q(p+\xi)+2p}{q\eta} \tag{9}$$

oder wenn wir die Gleichung (8) berücksichtigen, in

$$\frac{q-3t^2}{t} = \frac{2(p-\xi)}{\eta}$$
$$\frac{3q-t^2}{t} = 2\,\frac{q(p+\xi)+2p}{q\eta}$$

woraus wir erhalten:

$$\xi = -\frac{p(q+3)}{2q} - p(q+1)\,\frac{1}{t^2-q}$$
$$\eta = -\frac{p(q+1)}{q}\cdot\frac{t}{t^2-q}. \tag{10}$$

Der Ort der Punkte H ist somit ein zum gegebenem affiner Kegelschnitt. Die Verwandschaft der entsprechenden Punkte t und H geben die Gleichungen.

$$\xi = -\frac{p(q+3)}{2q} - \frac{q+1}{2} x$$
$$\eta = -\frac{q+1}{2q} y . \qquad (11)$$

Die Einhüllende der entsprechenden Punkte t und H der Kegelschnitte (t) und (H) ist eine rationale Kurve 4ten Klasse: Zwischen den Koordinaten des Punktes t, beziehungsweise H und der Geraden tH besteht eine birationale kvadratische reziproke Verwandschaft.

Am anderen Orte[1]) haben wir gezeigt, dass

$$x' = \frac{p(q-3)}{4q} + \frac{p(q+1)}{2} \cdot \frac{1}{t^2-q}$$
$$y' = \frac{p(q+1)}{2q} \cdot \frac{t}{t^2-q} \qquad (12)$$

die Koordinaten des Mittelpunktes S des Umkreises eines dem Punkte t entsprechenden Oskulationstripel am Kegelschnitte (t) sind. Dieselben können wir schreiben

$$x' = \frac{p(q-3)}{4q} + \frac{q+1}{4} x$$
$$y' = \frac{q+1}{4q} y . \qquad (13)$$

Auch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte t und S der Kegelschnitte (t) und (S) hüllen eine rationale Kurve 4ter Klasse ein, und die Verwandschaft zwischen den Punkten t resp. S und den Geraden $t\ S$ ist eine birationale kvadratisch reciproke.

Aus den Gleichungen (11) und (13) folgt

$$2x' + \xi = -3\frac{p}{q}$$
$$2y' + \eta = 0, \qquad (14)$$

[1]) Zahradník: Oskulationstripel am Kegelschnitte l. c. pg. 423.

woraus wir erkennen, dass die Verbindungslinien der Punkte H, S ein Strahlenbüschel bilden mit dem Scheitel im Mittelpunkte des gegebenen Kegelschnittes.

Der Flächeninhalt des Dreieckes $t\ H\ S$ ist

$$\triangle = \frac{3}{8}\,\frac{q^2-1}{q^2}\,y(qx+p) = \frac{3}{8}\,\frac{q^2-1}{q^2}\,ys_n, \tag{15}$$

wo s_n die Subnormale des Punktes $t\,(xy)$ bedeutet. Aus der Formel (15) erkennen wir, dass in den Scheiteln des Kegelschnittes (t) die entsprechenden Punkte t, H, S in einer Gerader liegen.

Ist der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, somit $q=1$, wird $H=u$ d. i. die Normalen des Oskulationstripels auf einer gleichseitigen Hyperbel, schneiden sich auf der Hyperbel selbst und zwar im Punkte u der diametral ist dem Punkte t, welchem das Oskulationsdreieck zugeordnet ist.

Der Ort der Mittelpunkte der Umkreise (S) ist hier eine gleichseitige, der Hyperbel (t) ähnlich gelegene Hyperbel, welche ihren Mittelpunkt im Scheitel der gegebenen Hyperbel hat.

VI.

Ueber Lagerung von cenomanen und diluvialen Sedimenten in und auf den silurischen Kieselschiefern zwischen Kojetic und Lobkovic.

Von Dr. **Ant. Fritsch.**

Mit 5 Textfiguren.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. April).

Nach der Entdeckung von cenomanen Rudistenschichten im Granitgebiete bei Skuč*) lenkte ich die Aufmerksamkeit des Herrn Lehrers Peterbok auf die Kieselschiefer, welche zwischen Čakovic und Lobkovic in langen, von Westen nach Osten ziehenden Rücken auf dem Plateau sich erheben und sprach die Hoffnung aus, dass in den Klüften des Kieselschiefers auch cenomane Ablagerungen vorkommen könnten. Vor vielen Jahren habe ich Letten auf dem Kieselschiefer bei Lobkovic gefunden, welche viele Haifischzähne enthielten.

Herr Peterbok untersuchte zahlreiche Steinbrüche in denen der Kieselschiefer behufs Gewinnung von Schotter gebrochen wird und fand bald in Klüften und Höhlungen desselben einen erdigen Brauneisenstein mit vielen Petrefacten der Korycaner Schichten.

Ich untersuchte den Fundort im September vorigen Jahres und studierte die Lagerungsverhältnisse, welche besonders in Bezug der diluvialen Decke sehr intressante und überraschende Resultate lieferten. Unter einer 20—30 *cm* mächtigen schwärzlichen Ackerkrume mit sehr spärlicher Vegetation folgt eine ebenso mächtige Lage von brauner Erde, in welcher eine Menge von scharfkantigem Schotter des Kieselschiefers in 2—3 horizontalen Lagen liegt. Unter dem

*) Sitzungsber. der kön. böhm. Ges. d. Wiss. II. Classe. 22. Jänner 1909.

Schotter findet man handgrosse Gerölle von Quarzit mit *Scolitus linearis* der Etage D—d 2. Unter dieser Schichte folgt eine 15—30 *cm* mächtige Lage von feinem braunem Sande, der wohl zerfallenen hergeschwemmten Quadersandsteinen seinen Ursprung verdankt. Nun folgen zerstörte Blöcke von Kieselschiefern, die nach unten in den festen Kieselschiefer (Et. B.) übergehen.

Zwischen den Blöcken liegt eine grosse Partie von erdigem Brauneisenstein voll von Petrefacten der Korycaner-Schichten.



Fig. 1. Photographie des Steinbruches von Kojetic. 1. Ackererde. 2. Braune Erde mit Kieselschiefer. In der Mitte die Ausfüllung mit Limonit. 3. Kieselschiefergerölle.

Bezeichnend für die ganze Gegend sind besonders zwei Steinbrüche, welche ich in nachstehendem eingehend besprechen werde und deren Profile ich in schematischen Skizzen gezeichnet habe.

I. Der Steinbruch „Barcalová Skála" süd-östlich von Kojetic.

Fig. No. 1.

An dieser Lokalität ragte ursprünglich der Kieselschiefer als kahler Felsen aus der Ebene hervor und die Ackerkrume lagerte sich an der Basis desselben später als eine wenig mächtige Lage an. Mit der Zeit wurden die hervorragenden Partien des Kieselschiefers zur Schot-

tergewinnung abgebrochen und man sieht jetzt nicht die ursprünglichen Verhältnisse. Die Höhe der noch anstehenden Felsen beträgt 215 *m* und ist als „Kojeticer Berg" bezeichnet. Die Ackerkrume ist schwärzlich und enthält spärlich kleine Brocken des Kieselschiefers. Fig. 2. **1.**

Unter derselben folgt eine 20—30 *cm* mächtige Lage einer braunen Erde (2) in welcher in zwei oder drei horizontalen La-

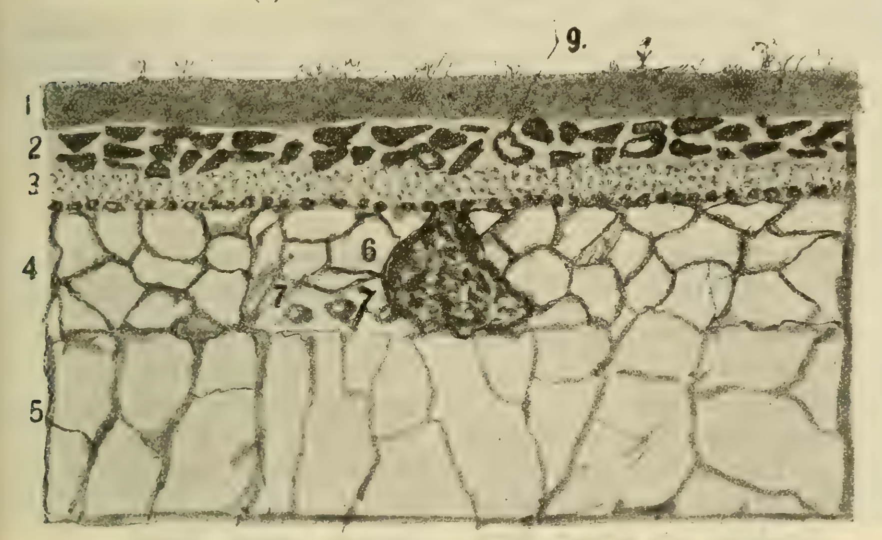


Fig. 2. Schematisches Profil des Steinbruches des Herrn Barcal bei Kojetic. 1. Ackererde. 2. Braune Erde mit scharfkantigem Kieselschiefer und Gerölle von Quarzit mit Scolithus Et. Dd2. (9). 3. Brauner Sand mit kleinen Kieselschiefergeröllen an der Basis. 4. Blockiger Kieselschiefer. 5. Anstehender Kieselschiefer. 6. Höhle ausgefüllt mit in Limonit umgewandelten Petrefacten der cenomanen Korycaner Schichten. 7. Gerölle von Kieselschiefer.

gen scharfkantige Kieselschieferstücke liegen, deren Länge im Durchschnitte 20—30 *cm* die Dicke 10 *cm* beträgt.

Diese Einlagerung der Brocken, die sich in allen Steinbrüchen der Umgebung ganz regelmässig wiederholt, ist sehr schwer zu erklären. Noch merkwürdiger ist das Vorkommen von grossen Geröllen von Quarzit mit Scolithus linearis unter den Kieselschieferschollen die hier in diesem Steinbruche vorkommen. Die Quarzite mussten von Süden hergeschwemmt worden sein, denn nördlich von der beschriebenen Gegend giebt es keine anstehende solche Quarzite.

Unter der braunen Erde liegt hier wie in den anderen Steinbrüchen eine 20—30 *cm* mächtige Lage von feinem braunen Sande

Fig. 2. 3 ohne jede grössere Beimischung. Dieser Sand stammt von zerstörten und abgeschwemmten Quadersandsteinen der Korytzaner Schichten welche südlich von Kojetic mehrfach anstehen.

Die Körner sind abgerundet, der grösste Teil ist bräunlich, einige rötlich, andere milchweis.

An der Basis dieses Sandes liegt eine Lage von kleinen 8—10 *cm* langen incrustirten Kieselschiefergeröllen.

Unter dem Sande liegen hier (an dem Fundorte der cenomanen Petrefacten) Blöcke von Kieselschiefer; nach unten hin ist derselbe fest anstehend.

Zwischen den Blöcken gewahrt man eine mit Brauneisenstein erfüllte Höhlung (6), welche stellenweise viele Petrefacten der cenomanen Korycaner-Schichten enthält. Siehe Verzeichnis:

Verzeichnis der im Brauneisenstein der Höhlung im Kieselschiefer bei Kojetic vorgefundenen Petrefacten.

Carcharias priscus Gieb. Ein Zahn.
Fischwirbel.
Natica Gentii Sow.
Nerita nodosa Gein. sp.; eine ganze Entwickelungsreihe von 2 — *cm* Grösse an. Sehr variabel. Steinkerne aus weisser Masse.
Trochus Geinitzii Reuss.
Euchrysalis? Steinkern.
Chemnitzia.
Nerinea sp. (Cottae?) Steinkern einer Spindel von 25 *mm* Durchmesser.
Crassatella sp. Steinkern.
Modiola. Cottae A. Roem.
Inoceramus striatus Mant.
Lima tecta. Goldf.
Lima Hoperi Gein. Glatte Steinkerne.
Lima canalifera Goldf.
Vola sp. mit 8 Rippen.
Pecten acuminatus Gein.
Spondylus striatus Sow.
Ostrea diluviana L.
Ostrea carinata Lam.
Ostr. hippopodium Nilss.
Exogyra lateralis Reuss.
Stenopleura. Deckel.
Cryptaulia?
Rhynchonella compressa. Sehr häufig auf einer Stelle, in einer Reihe von Entwickelungs-Stadien.
Terebratula biplicata Sow.
Serpula conjugata Gein.
Pyrina Desmoulinsi D. Arch.
Echinus sp. Steinkern.
Cidaris Sorignetti Des.
Cidaris vesiculosa Goldf.
Heliopora sp.

In diese Höhlung mussten die Petrefacten geraten sein zur Zeit wo der Kieselschiefer von den Fluthen des Kreidemeeres überspült wurde.

Es musste hier eine Strömung, vieleicht von einer warmen Quelle herrührend, bestanden haben, denn am Grund der Höhlung finden sich Gerölle von Kieselschiefer (Fig. 2. 7).

In demselben Steinbruch wenige Schritte von dem beschriebenen

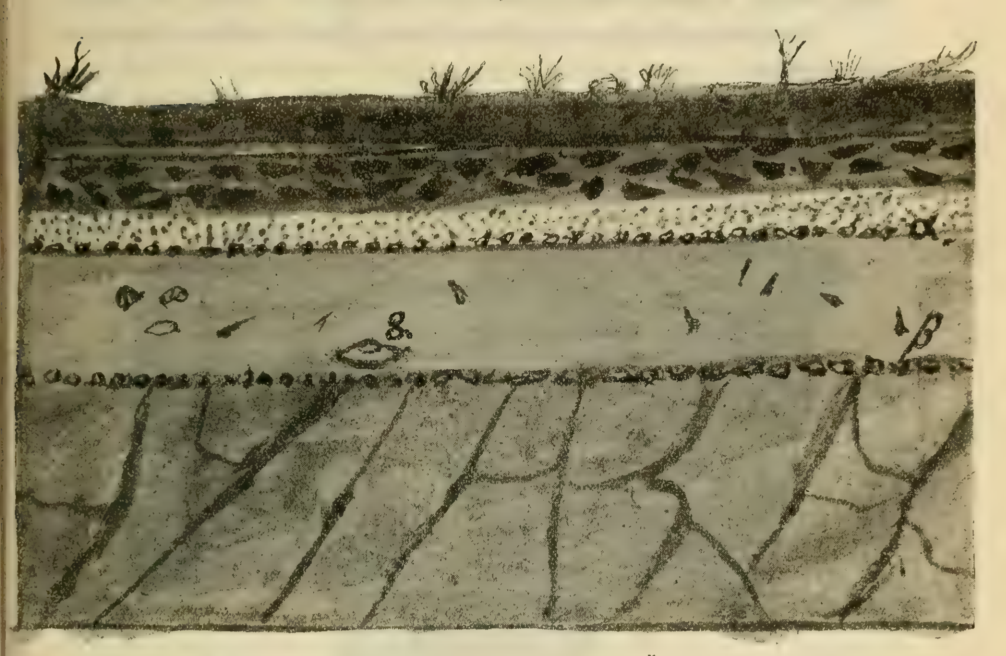


Fig. 3. Schematisches Profil des Steinbruches bei Klein-Čakovic. 1. Schwärzliche Ackerkrume. 2. Braune Erde mit eckigen Fragmenten des Kieselschiefers und mit Geröllen von Quarzit mit Scolithus. Dd2. 3. Brauner Sand. 4. Obere Lage von kleinem Gerölle. α. 5. Fette grünliche Letten mit Haifischzähnen und Muscheln. 6. Untere Lage von kleinem Gerölle β. 7. Anstehender Kieselschiefer mit Arenicolites. 8. Gerölle des Kieselschiefers auf dem die Schale eines Spondylus angewachsen ist.

Orte liegt unter dem braunen Sande eine etwa 1 *m* mächtige Schicht schneeweissen Lettens.

II. Steinbruch bei Klein Čakovic südlich von Lobkovic.

Fig. No. 3.

Der zweite charakteristische Steinbruch liegt bei klein Čakovic in einer Seehöhe von 192 *m*. Die diluvialen Ablagerungen stimmen genau mit denen von Kojetic. Unter der Ackerkrume liegt wieder die braune Erde mit scharfeckigen Schollen von Kieselschiefer und Geröllen von Quarzit D—d2. (2). Unter derselben folgt der braune

Sand (3), an dessen Basis wieder eine Lage von kleinen incrustirten Kieselschiefergeröllen lagert.

Nun folgen die Korycaner Schichten in Form von gelblichgrünen Letten in einer Mächtigkeit von 1 *m* (5).

Dieselben enthalten vor allem kleine Haifischzähne (Oxyrhina angustidens).

Stellenweise sind die Letten mehr sandig und enthalten massenhaft Trümmer von Austernschaalen. Eine vorläufige Untersuchung dieser Muschelschichte lieferte folgende Arten.

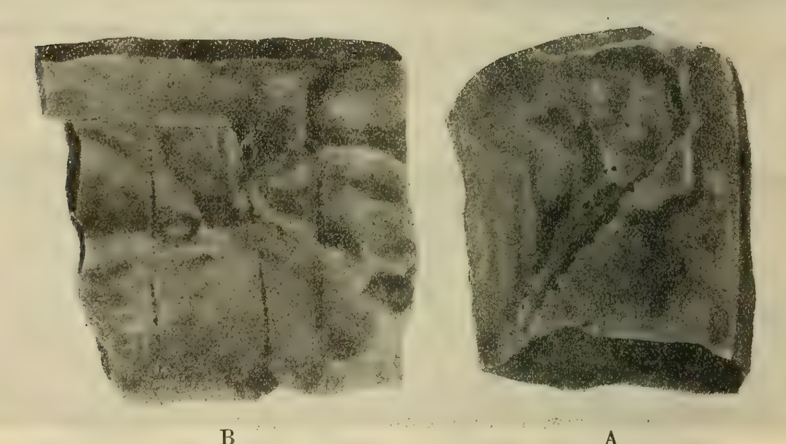


Fig. 4. A. Geglätteter Kieselschiefer von Kojetic mit paarweise stehenden Poren von Arenicolites. Nat. Grösse. B. Fortsetzungen der Poren in die Masse des Kieselschiefers auf senkrechten Spaltflächen.

Muschelschichte von Klein Čakovic. Fig. 3. (8. b).

Lösskindelartige Concretionen.
Spondylus striatus auf einem Stück Kieselschiefer aufgewachsen.
Ostrea diluviana L. Bruchstück.
Ostrea hippopodium Nilss. Massen von Bruchstücken.
Exogyra sigmoidea. Reuss.
Synhelia gibbosa Goldf. (wie in Kamajk).
Cidaris vesiculosa Goldf.
Cidaris Sorignetti Des.
Verruculina sp.
Coelospongia obesa Počta.
Craticularia sp.

An der Basis der Letten liegt wieder eine einschichtige Lage von kleinen Kieselschiefergeröllen, welche somit nicht dem Diluvium angehören können. Dieselben gleichen vollkommen den oberhalb des Letters liegenden, welche demnach auch kaum diluvial sind. Unter dem unteren Gerölle folgt dann fester anstehender Kieselschiefer.

Aus den gegebenen Schilderungen erkennt man, dass in der Gegend von Kojetic mehrere intressante Probleme zu lösen sind, welche natürlich längere Arbeit erfordern werden.

Vor allem ist der Kieselschiefer als Liegendes näher zu untersuchen. Derselbe zeigt an den ursprünglichen, nicht durch Bruch

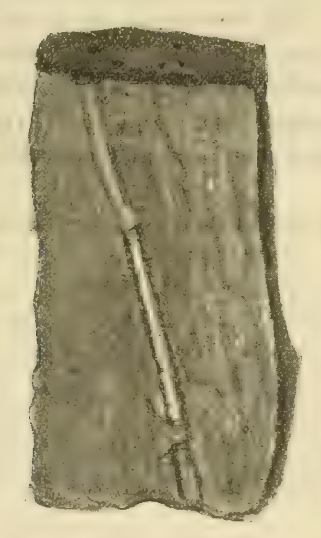


Fig. 5. Senkrechter Gang in Kieselschiefer mit runder weisslicher Achse Vergr. 6 mal.

gewonnenen Flächen eine durch die Fluthen des ehemaligen Meeres geglättete Oberfläche. Beobachtet man dieselbe mit der Lupe so gewahrt man kleine paarweise liegende runde Öffnungen, die, wenn sie klein sind, nahe bei einander stehen; wenn sie grösser sind, weiter von einander entfernt sind.*) (Fig. 4. A.) An senkrechten Spaltflächen kann man die Öffnungen als lange Gänge verfolgen. (Fig. 4 B.)

An neuem Material constatirte ich bei diesen senkrechten Gän-

*) Aehnliche paarige Öffnungen sah ich im Jahre 1860 im englischen Silur wo sie als Arenicolites beschrieben wurden und besprach das Vorkommen derselben in Böhmen in den Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften (22. Juli 1861).

gen, dass sie eine runde weissliche Achse besitzen (Fig. 5.) ähnlich denen wie sie in grösserem Masstab bei Scolithus vorkommen.*)

Diess ist eine definitive Sicherstellung von organischen Resten im Kieselschiefer, welcher somit die ersten Andeutungen von organischen Wesen in der Cambrischen Formation Böhmens enthält.

Ich liess auch eine Reihe von Dunnschiffen von diesem Kieselschiefer anfertigen, welche sehr räthselhafte Dinge zeigen und zu einer eingehenden Untersuchung der Kieselschiefer von anderen Localitäten auffordern.

Schon im Jahre 1853 versicherte mich der berühmte Forscher Ehrenberg in Berlin, dass im böhm. Kieselschiefer Diatomaceenartige Formen vorkommen und ich sandte ihm einige Proben dieses Gesteines.

Die neue Generation wird wohl der Frage über die organischen Reste im Kieselschiefer ihre Aufmerksamkeit zuwenden.

---

*) Dr. A. Fritsch. Problematica silurica. pag. 17. Taf. 5 Fig. 1.

VII.

Zur Schattenkonstruktion des Plückerschen Konoids.

Mit 2 Textfiguren.

Von W. Jeřábek in Telč.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. April 1910.

1. Wir wählen die Achse A eines Plückerschen Konoides vertikal, dann sind seine Erzeugenden B, C, M horizontal, und wenn wir annehmen, dass A die Erzeugenden B, C in A' und M in a_1 schneidet, so ist hiedurch das Konoid völlig bestimmt. Denn legt man durch M irgend eine Ebene, so wird sie die Gerade B in b_1, C in c_1 und dass Konoid in einer Ellipse $(a_1\ b_1\ c_1)$ schneiden, die sich auf eine Normalebene zur Achse als Kreis projiziert.*) Man kann demnach A und den elliptischen Schnitt $(a_1\ b_1\ c_1)$ als Leitlinien und die Projektionsebene als Richtebene betrachten, wodurch die Bestimmung des Konoids erhellt.

Wird die Ebene π der Erzeugenden B, C als Projektionsebene (Grundrissebene) gewählt, so ist der Schnittpunkt $A' = (BC)$ die Projektion von A (Fig. 1.), die Gerade M projiziert sich in $M' \parallel b_1\ c_1$ durch A', und der Kreis $(A'\ b_1\ c_1)$ stellt den Grundriss des elliptischen Schnittes $(a_1\ b_1\ c_1)$ dar; denn in A' befindet sich die Projekion von a_1 und die Projektionen von b_1, c_1 sind mit diesen Punkten identisch.

Es wird Parallelbeleuchtung vorausgesetzt; L' durch A' sei die Projektion eines Lichtstrahles L, den wir uns durch den Schnittpunkt $a_1 = (AM)$ gelegt denken. Nun wählen wir den Kegelschnitt $(a_1\ b_1\ c_1)$ so, dass in seiner Ebene der Lichtstrahl L sich befinde; es wird

*) Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, III. Band, Seite 236, 1906.

dann $b_1\ c_1$ den Schatten M_s auf π jener Erzeugenden M darstellen, deren Grundriss M' durch A' parallel zu $b_1\ c_1$ geht, und der Schatten von a_1 ist der Schnittpunkt a_{1s} von L' mit M_s.

Der zu $b_1\ c_1$ normalstehende Durchmesser $u'_1\ o'_1\ v'_1$ des Kreises $(A'\ b_1\ c_1)$, den wir auch mit (o'_1, r_1)*) bezeichnen werden, stellt den Grundriss der Achse $u_1\ o_1\ v_1$ der Ellipse $(a_1\ b_1\ c_1)$ mit dem Mittelpunkte o_1 dar. Durch u_1, v_1 gehen die Torsallinien T, T_1, welche die Achse A in den Kuspidalpunkten t resp. t_1 treffen und ihre Grundrisse in $T' = A' u'_1$, $T'_1 = A'\ v'_1$ haben.

Sei P' durch A' der Grundriss einer beliebigen Erzeugenden P des Konoids, welche A in a schneidet, so dass auch der Grundriss von a in A' liegt. Die Gerade P schneidet die Ellipse $(a_1\ b_1\ c_1)$ in einem Punkte l, dessen Grundriss im zweiten Schnittpunkte l' von P' mit dem Kreise $(A'\ b_1\ c_1)$ liegt. Zieht man durch l' eine Parallele zu L', so wird sie auf M_s den Schaten l_s von l bestimmen, und legt man P_s durch l_s parallel zu P', so erhält man den Schatten von P. Betrachten wir P als variabel, so kann die Schlagschattengrenze E_s des Konoides als Einhüllende von P_s gezeichnet werden.

Nun scheiden wir mit P_s die Gerade B in b und C in c. Die Schattenebene $(P P_s)$ schneidet das Konoid in einer Ellipse $(a\,b\,c)$, welche die Punkte a, b, c enthält, und deren Grundriss als Kreis $(A'\,b\,c) = (o', r)$ *) erscheint. Die Gerade M hat mit der Ellipse (abc) einen Punkt e_1 gemeinsam, dessen Grundriss e'_1 im zweiten Schnittpunkte von M' mit $(A'\,b\,c)$ sich befindet.

Wir haben schon früher erwähnt, dass die Gerade P mit dem Punkte l in der Ebene $(P P_s)$ liegt und den Kegelschnitt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der Ebene $(M M_s)$ im Punkte l schneidet, es ist also l ein gemeinsamer Punkt der Ebenen $(M M_s)$, $(P P_s)$; ebenso haben diese Ebenen den Punkt e_1 gemeinsam. Nun können wir uns leicht vorstellen, dass die Schattenebenen $(M M_s)$, $(P P_s)$ in dem Lichtstrahle $e_1\ l$ sich schneiden, dessen Projektion $e'_1\ l'$ parallel zu L' ist, und dass der Schatten e_{1s} von e_1 mit l_s zusammenfällt.

Wird nun die Erzeugende P als fest und M als variabel betrachtet, so kann die Schlagschattengrenze E_s als Einhüllende von M_s gezeichnet werden.

Herr A. Adler hat im 63. Bande der Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien elementar nachgewiesen, dass die Schattenkurve E_s eine Steinersche Hypozykloide ist, welche auf

---

*) o'_1 Mittelpunkt, r_1 Radius.

Grund der Steinerschen Definition leicht gezeichnet werden kann. In der vorliegenden Arbeit erlaube ich mir dasselbe Thema in abweichender Weise zu behandeln und zugleich zu zeigen, dass die Eigenschattengrenze des Konoides im Grundrisse als eine zirkulare Kurve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte erscheint,*) die unter den speziellen Kurven den Namen schiefes Dreiblatt hat.**) Es wird auch nachgewiesen, dass die Schlagschattengrenze auf die Fläche des Konoides im Grundrisse aus Bögen einer Kardioide besteht.***)

2. Die Erzeugende P, die wir bisher beliebig gewählt haben, sei normal zu L, es steht also L' senkrecht auf P' und P_s, mithin liegt der Schatten a_s von a (Fig. 1.) im Fusspunkte der Höhe, welche aus A' auf bc in dem Dreiecke $A'bc$ gefällt wird. Schon früher haben wir die Bemerkung gemacht, dass die Schattenebene (PP_s) das Konoid in einer Ellipse (abc) schneidet, deren Grundriss durch den Kreis $(A'bc) = (o', r)$ dargestellt erscheint. Sind u, v die Schnittpunkte der Torsallinien T, T_1 mit der Ellipse (abc), so ist uov ihre Achse, deren Grundriss $u'o'v'$ ein zu bc normalstehender Durchmesser des Kreises (o', r) ist. Dass der Mittelpunkt o dieser Ellipse seinen Grundriss in o' hat, ist klar. Auch wurde erwähnt, dass die Erzeugende M die Ellipse (abc) im Punkte e_1 schneidet, dessen Grundriss der zweite Schnittpunkt e'_1 von M' mit (o', r) ist, und dass $e'_1\, l'\, l_s$ in einer Geraden liegen, die parallel zu L' ist, also in unserem Falle senkrecht auf bc steht, da L' zu bc auch eine senkrechte Lage hat.

Wenn also der feste Kreis dem Dreiecke $A'bc$ umschrieben ist und L' normal auf bc vorausgesetzt wird, so kann die Einhüllende E_s von M_s gezeichnet werden, wenn man einen variablen Punkt e'_1 von $(A'bc)$ auf bc orthogonal projiziert und durch die Projektion l_s die Gerade M_s parallel zu $A'e'_1 = M'$ zieht.

---

*) Rohn und Papperitz, Darstellende Geometrie, Band III., 1906, S. 239„ Fig. 133.

**) Loria-Schütte „Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven"- Leipzig, Teubner 1902, 156. Wieleitner, „Spezielle ebene Kurven", Leipzig Gö, schen'sche Verlagshandl. 1908, S. 153. Fig. 71. G. Teixeira, „Traité des courbes spéciales remarquables. Coimbre, 1908, Seite 302—305.

***) Andere Beweise, welche die Steinersche Kurve, das Dreiblatt und die Kardioide betreffen, sehe man in Eduard Janisch: Zur Schattenkonstruktion für das Plückersche Konoid. Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe XII, 1907, Seite 317 – 328.

3. Nun werden wir beweisen, dass die Schattenkurve E_s eine *Steinersche* Kurve ist. Zu diesem Zwecke ziehe man im Kreise $(A' b_1 c_1) = (o'_1, r_1)$ die Sehne $l' l_s f'_1$ und verbinde f'_1 mit b und c. Da $l' l_s f'_1$ auf $A' l'$ senkrecht steht, so ist $A' o'_1 f'_1$ ein Durchmesser des Kreises (o'_1, r_1), mithin sind $b b_1 f'_1$ und $c c_1 f'_1$ rechte Winkel; es

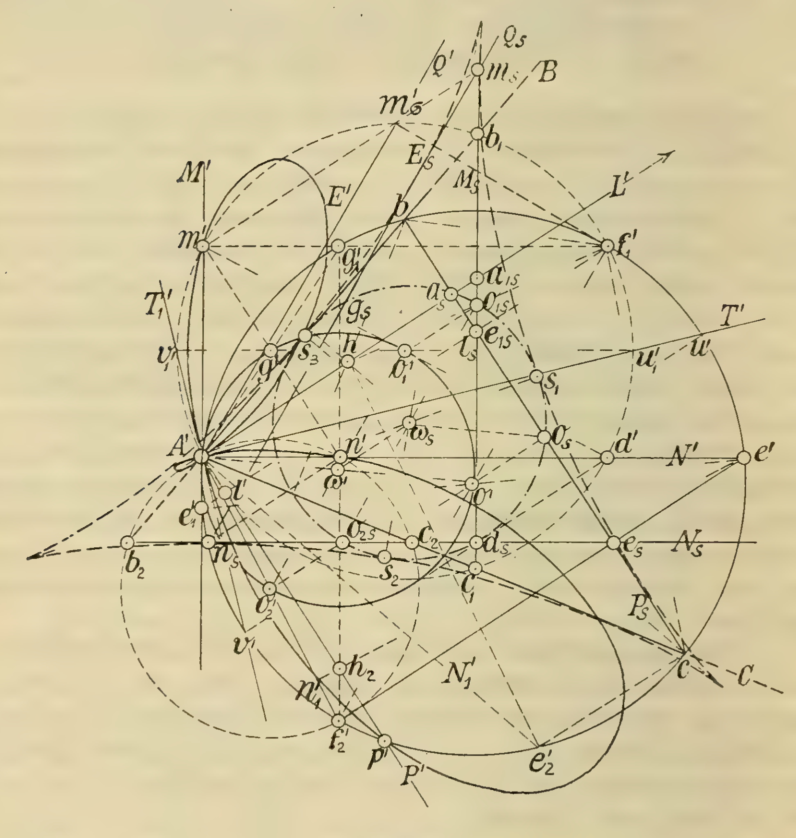


Fig. 1.

steht aber $f'_1 l_s$ normal auf $b c$, daher sind $b b_1 f'_1 l_s$ und $c c_1 f'_1 l_s$ Kreisvierecke, es ist also

$$\sphericalangle b f'_1 l_s = \sphericalangle b b_1 l_s,$$
$$\sphericalangle c f'_1 l_s = \sphericalangle A' c_1 l_s,$$

und durch Addition erhält man

$$\sphericalangle b f'_1 c = \sphericalangle b b_1 l_s + \sphericalangle A' c_1 l_s = 180^0 - \sphericalangle b A' c,$$

hieraus folgt, dass der Punkt f'_1 auf der Kreislinie $(A' b c) = (o', r)$ liegt.

Für späteren Gebrauch wollen wir auch bemerken, dass der Durchmesser $A' o'_1 f'_1$ des Kreises (o'_1, r'_1) eine Sehne des Kreses (o', r) ist, welche durch o'_1 halbiert wird.

Die Gerade M_s verbindet die Fusspunkte b_1, l_s, c_1 der Lote, die aus dem Punkte f'_1 des Umkreises (o', r) auf die Seiten des Dreieckiges $A' b c$ gefällt werden können; sie ist daher eine Simsonsche (Wallacesche) Gerade des Dreieckes $A' b c$, folglich hüllt M_s eine *Steinersche* Kurve ein, und als solche kann sie leicht gezeichnet werden.

4. Wir haben schon (Nr. 3) bemekt, dass o'_1 die Sehne $A' o'_1 f'_1$ des Kreises (o', r) halbiert, demnach sind o'_1, f'_1 ähnlich liegende Punkte in Bezug auf A' und das Verhältnis

$$\frac{A' o'_1}{A' f'_1} = \frac{1}{2},$$

es muss also der Mittelpunkt o'_1 auf einem Kreise $(\omega', \frac{1}{2} r)$ liegen, der mit (o', r) in Bezug auf A' und das Verhältnis $\frac{1}{2}$ ähnlich liegt, und dessen Mittelpunkt ω' mit o' ähulich gelegene Punkte sind.

Nun werden wir zeigen, dass der Mittelpunkt o_1 der veriablen Ellipse $(a_1 b_1 c_1)$ einen durch den Mittelpunkt des Konoides gehenden und zur Grundrissebene π parallelen Kreis beschreibt, der seinen Grundriss in $(\omega', \frac{1}{2} r)$ hat.

Die Torsallinien T, T_1 sind nämlich parallel zur Grundrissebene und tragen die variablen Scheitel u_1, v_1 der veränderlichen Ellipse $(a_1 b_1 c_1)$, mithin liegt der variable Mittelpunkt o_1 dieser Ellipse auf einer Ebene π_1, welche die Verbindungsstreckecke $t t_1$ der Kuspidalpunkte t, t_1 senkrecht halbiert, also durch den Mittelpunkt des Konoides parallel zu π geht. Da aber o_1 die Kontraprojektion von o'_1 in der Ebene $\pi_1 // \pi$ ist,*) so beschreibt o_1 in dieser Ebene die Kontraprojektion des Kreises $(\omega', \frac{1}{2} r)$, also einen Kreis $(\omega, \frac{1}{2} r)$, der durch den Mittelpunkt des Konoids geht, da $(\omega', \frac{1}{2} r)$ den Grundriss A' dieses Mittelpunktes enthält. Wir haben also den Satz:

Legt man durch die Erzeugenden des Plückerschen Konoids Ebenen parallel zu einer gegebenen Richtung L, so schneiden sie das Konoid in Ellipsen,

---

*) Wenn ein Punkt o_1 einer Ebene π_1 seine Projektion auf einer Projektionsebene π im Punkte o'_1 hat, so nennt man o_1 die Kontraprojektion von o'_1.

deren Mittelpunkte auf einem Kreise (ω, $\frac{1}{2}r$) liegen, welcher parallel zur Grundrissebene ist, durch den Mittelpunkt des Konoids geht und zum Grudriss den Kreis (ω', $\frac{1}{2}r$) hat.

Wir werden den Kreis (ω, $\frac{1}{2}r$) Mittelpunktskreis des Konoides nennen.

5. Wenn also der Umkreis (o', r) des Dreieckes $A'\,b\,c$ gezeichnet vorliegt, so kann auch der Kreis (ω', $\frac{1}{2}r$) konstruiert werden, welcher den Radius $A'o'$ des Kreises (o', r) zum Durchmesser hat. Wählt man auf dem Kreise (ω', $\frac{1}{2}r$) irgend einen Punkt o'_1, beschreibt um ihn einen Kreis (o'_1, r_1), welcher durch A' geht, so wird er im Grundrisse einen Ellipsenschnitt ($a_1\,b_1\,c_1$) des Konoids darstellen, dessen Ebene parallel zum Lichtstrahle ist und eine Erzeugende M des Konoids enthält, welche die Achse A in a_1 schneidet. Der Kreis (o'_1, r_1) schneidet $A'b$ in b_1 und $A'c$ in c_1; $b_1\,c_1$ ist der Schatten M_s von M, und die Einhüllende von M_s ist die Schlagschattengrenze E_s des Konoides, wobei der Grundriss L' der Strahlenrichtung L ein aus A' auf $b\,c$ gefälltes Lot ist.

6. Sei $N' \perp M'$ der Grundriss einer Erzeugenden N des Konoids, die eine normale Lage zu M hat und den Ellipsenschnitt ($a\,b\,c$) im Punkte e trifft; dieser Punkt hat seinen Grundriss im zweiten Schnittpunkte e' von N' mit der Kreislinie (o', r). Wenn man in diesem Kreise die Sehne $e'\,f'_2$ senkrecht auf $b\,c$ zieht, so ist der Schnittpunkt e_s von $e'\,f'_2$ mit $b\,c$ der Schatten von e in der Gegenrichtung von L, und die Parallele N_s durch e_s zu N' stellt den Schatten von N dar. Die Erzeugende N hat auch mit der Ellipse ($a_1\,b_1\,c_1$) einen Punkt d gemeinsam; der Grundriss dieses Punktes liegt im zweiten Schnittpunkte d' von N' mit (o'_1, r_1), und der Schatten von d ist durch den Schnittpunkt d_s von M_s mit N_s bestimmt, denn dd_s ist die Schnittlinie der Schattenebenen ($M\,M_s$), ($N\,N_s$), folglich ist $d'\,d_s$ als Grundriss von $d\,d_s$ parallel zu L'. Da M_s und N_s parallel sind zu den normalen Geraden M' resp. N', so steht N_s senkrecht im Punkte d_s auf M_s.

Seien b_2, c_2 die Schnittpunkte von N_s mit B resp. C, dann ist der Kreis ($A'\,b_2\,c_2$) $=$ (o'_2, r_2) der Grundriss der Ellipse ($a_2\,b_2\,c_2$), in welcher die Schattenebene $N\,N_s$ das Konoid schneidet. Der Mittelpunkt o'_2 von (o'_2, r_2) liegt (Nr. 4) im zweiten Schnittpunkte von $A'f'_2$ mit (ω', $\frac{1}{2}r$) und stellt den Grundriss des Ellipsenmittelpunktes o_2 dar; $o'_1\,\omega'\,o'_2 \,//\, f'_1\,o'_1\,f'_1$ ist ein Durchmesser von (ω'_1 $\frac{1}{2}r$).

Die Ellipsenmittelpunkte o, o_1, o_2 liegen resp. in den Schatten-

ebenen $(P P_s)$, $(M M_s)$, $(N N_s)$, mithin fallen ihre Schatten o_s, o_{1s}, o_{2s} resp. auf P_s, M_s, N_s, und o_s halbiert die Seite bc.

Der Kreis, den man durch $o_s\ o_{1s}\ o_{2s}$ legt, ist der Schatten des Mittelpunktskreises $(o\, o_1\, o_2) = (\omega, \frac{1}{2}r)$, und da dieser Kreis parallel zu π ist, so sind die Kreise $(\omega, \frac{1}{2}r)$, $(\omega', \frac{1}{2}r)$, $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ kongruent, und ω_s ist der Schatten von ω. Wir können also $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ als verschobene Lage des Kreises $(\omega', \frac{1}{2}r)$ in der Richtung L' und um die konstante Länge $\omega'\,\omega_s = o'\,o_s$ ansehen. Es ist aber $o_{1s}\ \omega_s\ o_{2s}$ ein Durchmesser des Kreises $(w_s, \frac{1}{2}r)$, und da der Winkel $o_{1s}\,d_s\,o_{2s}$ ein rechter ist, so liegt d_s auf der Kreislinie $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$. Also:

Der geom. Ort des Schnittpunktes senkrechter Tangenten M_s, N_s der Steinerschen Kurve E_s ist der Schatten des Mittelpunktskreises $(\omega, \frac{1}{2}r)$, also ein Kreis $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$, welcher als verschobene Lage des Kreises $(\omega', \frac{1}{2}r)$ in der zu bc senkrechten Richtung um die konstante Länge $\omega'\,\omega_s = o'\,o_s$ betrachtet werden kann.

Es sei μ der Mittelpunkt des Konoides und auf A die Strecke $A'\mu = \mu s$. Die Seiten und die zugehörigen Höhen $A'h$, bh, ch des Dreieckes $A'bc$ sind spezielle Lagen der normalen Schattengeraden M_s, N_s, es geht also der Kreis $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ durch die Höhenfusspunkte des Dreieckes $A'bc$. Denn, wenn M mit $B \equiv B_s$ zusammenfällt, so wird die Erzeugende $N_1 \perp B$ durch s eine besondere Lage von $N \perp M$ einnehmen. Der Grundriss N'_1 von N_1 steht in A' senkrecht auf $A'b$ und schneidet den Kreis (o', r) in einem zweiten Punkte e'_2, der als Grundriss des Schnittpunktes e_2 von N_1 mit der Ellipse (abc) erscheint. Da b, e'_2 im Kreise (o', r) Gegenpunkte sind, so steht $e'_2\,c$ senkrecht auf $b\,c$; der Eckpunkt c ist daher der Schatten von e_2, und die Höhe $ch \,//\, N'_1$ stellt den Schatten von N_1 dar. Es sind demnach B und ch besondere Lagen von M_s resp. N_s, wie oben ausgesprochen wurde.

Ebenso ist die Höhe bh der Schatten einer zweiten Erzeugenden des Konoides, welche durch s geht ($A'\mu = \mu s$ auf A, μ Mittelpunkt des Konoids), aber zu C normal ist. Die dritte Höhe ist der Schatten jener Erzeugenden, welche eine normale Lage zu P hat.

Der Mittelpunktskreis $(\omega, \frac{1}{2}r)$ hat auf π seine zentrale Projektion aus s im Kreise (o', r) und seine schiefe Projektion (Schatten) in der Richtung $sh \,//\, L$ in $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$; es ist aber h die schiefe Projektion von s, folglich haben die Kreise $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$, (o', r) den Punkt h zum äusseren. Ähnlichkeitspunkt und $\frac{1}{2}$ zum Ähnlichkeitsverhältnis.

Hieraus folgt, dass der Kreis $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ die oberen Höhenabschnitte $A'h$, bh, ch des Dreieckes $A'bc$ halbiert.

Da $A'hce'_2$ ein Parallelogramm ist, so geht seine Diagonale he'_2 durch den Halbierungspunkt der anderen Diagonale $A'c$, demnach sind e'_2 und die Mitte von $A'c$ homologe Punkte der zentrisch ähnlichen Systeme, in welchen $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$, (o', r) homologe Kreise sind, und da e'_2 auf (o', r) liegt, so muss sein homologer Punkt (die Mitte von $A'c$) auf dem Kreise $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ liegen. Ebenso enthält dieser Kreis die Mitte von $A'b$, und dass er auch durch die Mitte o_s von bc geht, wurde schon früher gezeigt.

Wir können so das Ergebnis unserer Betrachtungen in folgenden Satz zusammenfassen.

Der Schatten (schiefe Projektion) des Mittelpunktskreises $(\omega, \frac{1}{2}r)$ auf die Ebene π in der Richtung L ist ein Kreis $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ (Feuerbachscher Kreis des Dreieckes $A'bc$), welcher die Mitten der oberen Höhenabschnitte, die Höhenfusspunkte und die Seitenmitten des Dreieckes $A'bc$ enthält.

7. Wenn man im Kreise (o'_1, r_1) eine beliebige Sehne $d'd'_2$*) parallel zu L' zieht und durch den Schnittpunkt d_s von $d'd'_2$ mit b_1c_1 die Gerade N_s // $A'd'$, N_{2s} // $A'd'_2$ legt, so erhält man zwei Tangenten von E_s. Dadurch wird die Reihe der Punkte d_s auf b_1c_1 mit der Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden des Dreieckes $A'b_1c_1$ in eine (1, 2) Korrespondenz (ein-zweideutige Verwandschaft) gebracht, folglich ist die Steinersche Kurve als Einhüllende von N_s und N_{2s} eine Kurve vierter Ordnung dritter Klasse, welche die unendlich ferne Gerade in den imaginären Kreispunkten berührt und drei Spitzen hat.

8. Konstruktion der Eigenschattengrenze. Nun wenden wir unsere Aufmerksamkeit der Eigenschattengrenze des Konoides zu. Wir wissen, dass die Ellipse $(a_1 b_1 c_1)$ durch den Schnittpunkt a_1 (Nr. 1) der Achse A mit der Erzeugenden M geht, welche, da sie in der Schattenebene (MM_s) liegt, die Ellipse $(a_1 b_1 c_1)$ ausser a_1 noch in einem Punkte m schneidet. Dieser Punkt gehört der Eigenschattengrenze E an, denn die Tangente im Punkte m an die Ellipse bestimmt mit M die Tangentenebene des Konoides in m, die mit der Schattenebene (MM_s) identisch ist. Wir erhalten also den Grundriss m' von m im zweiten Schnittpunkte von M' mit dem Kreise (o'_1, r_1)

*) In der Figur nicht verzeichnet.

Es ist aber $A' o_1' f'_1$ (Nr. 3) ein Durchmesser von (o'_1, r_1), es steht daher $f'_1 m'$ senkrecht auf M'. Wenn wir noch bemerken, dass $e'_1 f'_1$ parallel zu L' ist (Nr. 2), so kann E' durch die nachstehende Konstruktion erhalten werden.

Man ziehe im Kreise (o', r) eine beliebige Sehne $e'_1 f'_1$ parallel zu L', verbinde den festen Punkt A' von (o', r) mit e'_1 und fälle aus f'_1 die Gerade $f'_1 m'$ senkrecht auf $A' e'_1$; der Fusspunkt m' dieser Senkrechten ist ein Punkt von E'.

Ebenso erhält man in N' den Punkt n'.

Da wir M' und N' in senkrechter Lage voraussetzten, so steht $f'_1 m'$ senkrecht auf $f'_2 n'$; es sind aber f'_1, f'_2 Gegenpunkte des Kreises (o', r), demnach liegt der Schnittpunkt g'_1 von $f'_1 m'$ mit $f'_2 n'$ in diesem Kreise. Der Mittelpunkt g' des Rechteckes $A' m' g'_1 n'$ halbiert die Sehne $A' g'_1$ des Kreises (o', r), er kommt daher auf den Kreis $(w', \frac{1}{2} r)$ zu liegen, der mit dem Kreise (o', r) in Bezug auf A' und das Verhältnis $\frac{1}{2}$ ähnlich liegt. Sei h_2 der Höhenschnittpunkt des Dreieckes $A' e' f'_2$, dann hat man $h_2 n' = n' g'_1$ $(\triangle A' n' h_2 \cong \triangle A' n' g'_1)$, und da auch $A' g' = g' g'_1$ ist, so ist $g' n' \parallel A' h_2 \parallel b c$, also $g' n' \perp L'$. Es ist aber $g' m' = g n' = g' A'$, daher können wir E' folgendermassen konstruieren.

Man ziehe durch irgend einen Punkt g' des Kreises $(\omega', \frac{1}{2} r)$ eine Senkrechte zu L' und mache auf dieser $g' m' = g' n' = g' A$; m', n' sind Punte des Grundrisses E' der Eigenschattengrenze des Konoides.

Aus dieser, so wie auch aus der obenangeführten Konstruktion folgt, dass E' eine Kurve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte in A' ist, die unter dem Namen schiefes Dreiblatt bekannt ist.*)

9. Schlagschattengrenze als Punktkurve. Sei m_s der Schatten von m auf M_s, n_s von n auf N_s und o_{1s} von o_1 auf M_s. Der Schnittpunkt d_s von M_s mit N_s ist der Schatten des Punktes d, dessen Grundriss in d' liegt. Es ist $m' m_s \parallel n' n_s \parallel o'_1 o_{1s} \parallel d' d_s$, und da M' senkrecht steht auf N', so sind m' und d' Gegenpunkte des Kreises (o'_1, r_1); es ist aber $m' o'_1 = o'_1 d'$, demnach schneiden die Parallelen $m' m_s$, $o'_1 o_{1s}$, $d' d_s$ zu L' auf M_s gleiche Strecken $m_s o_{1s}$, $o_{1s} d_s$ aus. Ebenso ist $n_s o_{2s} = o_{2s} d_s$. Hieraus folgt die bekannte

*) Dr. G. Loria-Schütte, „Spezielle algebr. und transcendente ebene Kurven", Seite 156. F. G. Teixeira, „Traité des courbes spéciales remarquables" S. 302. Dr. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, S. 154.

Bestimmung der Punkte m_s ($m_s\, o_{1s} = o_{1s}\, d_s$), n_s ($n_s\, o_{2s} = o_{2s}\, d_s$), in welchen M_s resp. N_s die Steinersche Kurve E_s berühren.

10. Da die Punkte m, n ihre Schatten in m_s, n_s haben, so ist $m_s\, n_s$ der Schatten von mn und zugleich der Schatten Q_s einer Erzeugenden $Q \,//\, Q_s$ des Konoides, welche in der Ebene $mnm_s\, n_s$ liegt und deren Grundriss Q' parallel zu Q_s durch A' geht. Die Schattenebene $mnm_s\, n_s$ hat noch mit dem Konoide eine durch mn gehende Ellipse gemeinsam mit dem Mittelpunkte g im Schnittpunkte von mn mit $(\omega, \frac{1}{2}r)$. Der Grundriss dieser Ellipse ist ein Kreis $(A'm'g'_1 n) = (g', g'A')$,*) und da g die Strecke mn halbiert und auf $(\omega, \frac{1}{2}r)$ liegt, so muss auch der Schatten g_s von g die Strecke $m_s\, n_s$ halbieren und auf $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ liegen. Wir wissen, dass o_{1s}, o_{2s} die Seiten $m_s\, d_s$ resp. $n_s\, d_s$ des rechtwinkeligen Dreieckes $m_s\, n_s\, d_s$ halbieren, und dass $o_{1s}\, \omega_s\, o_{2s}$ ein Durchmesser des Kreises $(\omega_s, \frac{1}{2}r)$ ist, es ist daher o_{1s}, o_{2s} parallel zu $m_s\, n_s$, und $m_s\, n_s$ hat die doppelte Länge von $o_{1s}\, o_{2s} = g_s\, m_s = g_s\, n_s = r$.

Wir haben also den bekannten Satz:

Jede Tangente der Steinerschen Kurve schneidet diese in zwei Punkten m_s, n_s; $m_s\, n_s$ hat eine konstante Länge $2r$ und der Mittelpunkt g_s von $m_s\, n_s$ liegt auf dem Inkreise.

11. Schlagschatten auf der Fläche. Die uns schon bekannte Ellipse $(a_1 b_1 c_1)$ des Konoides, die ihren Grundriss im Kreise (o'_1, r_1) hat, schneidet die Erzeugende Q im Punkte m_σ, der seinen Schlagschatten im Schnittpunkte m_s von Q_s mit M_s hat, denn Q_s ist der Schlagschatten von Q und der Schatten der Ellipse $(a_1 b_1 c_1 m_\sigma)$ liegt in M_s. Es befindet sich daher der Punkt m_σ im Lichtstrahle mm_s und zugleich auf der Fläche des Konoides; er ist daher der Schlagschatten von m auf die Fläche. Wir schliessen hieraus, dass der Grundriss m'_σ von m_σ der gemeisame Punkt von $m'm_s$, Q' und (o'_1, r_1) ist. Da $A'o'_1 f'_1$ (Nr. 3) ein Durchmesser des Kreises (o'_1, r_1) ist, so steht Q' senkrecht auf $m'_\sigma f'_1$; es ist aber

$$A'm'_\sigma \,//\, m_s\, n_s \,//\, o_{1s}\, o_{2s} \,//\, o'_1 o'_2 \,//\, f'_1 o' f'_2,$$

folglich steht der Radius $o'f'_1$ senkrecht auf $m'_\sigma f'_1$ im Punkte f'_1. Wir sehen nun dass $m'_\sigma f'_1$ eine Tangente des Kreises (o', r) ist und dass das Lot, welches aus A' auf die Tangente $m'_\sigma f'_1$ gefällt werden kann, seinen Fusspunkt in m'_σ hat. Also:

*) Der Kreis $(g', g'A')$ ist in der Figur 1 nicht verzeichnet.

Der Grundriss der Schlagschattengrenze der Fläche des Konoides auf sich selbt besteht aus Bögen einer Fusspunktskurve des Kreises (o', r) in Bezug auf den Pol A'.

Fällt man aus o' auf $A' m'_\sigma$ eine Senkrechte, so ist bekanntlich der Abstand des Fusspunktes dieser Senkrechten von m'_σ, welcher auf dem Kreise $(\omega', \frac{1}{2}r)$ liegt, dem Radius $o' f'_1 = r$ gleich; es ist daher die Fusspunktskurve eine Konchoide (Kardioide)

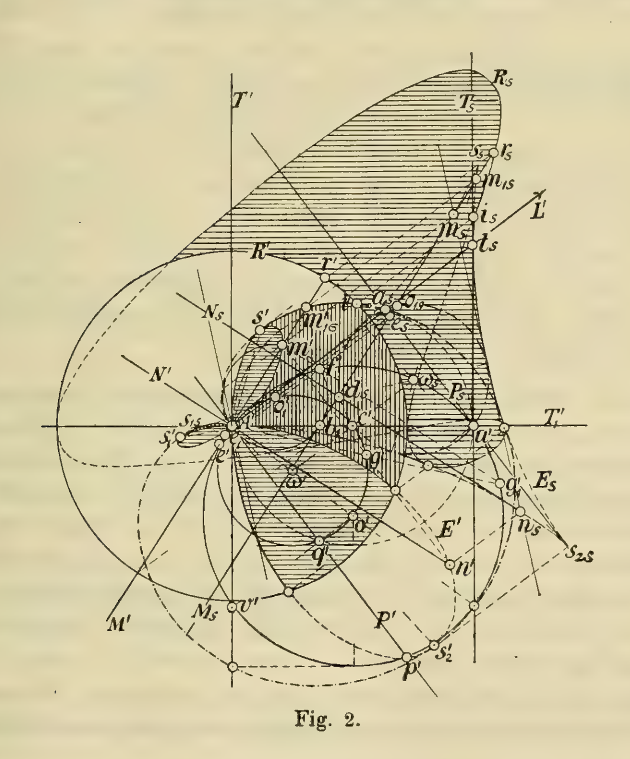


Fig. 2.

des Kreises $(\omega', \frac{1}{2}r)$ für den Punkt A' als Pol, wobei r die Länge der Auftragstrecke ist. —

12. Wir wollen noch zeigen, wie nach den bisherigen Erörterungen die Schattenkonstruktionen des Plückerschen Konoides sich einfach gestallten, wenn eine Torsallinie T_1 in der Grundrissebene π liegt und die andere T parallel zu π angenommen wird. In diesem Falle sind T, T_1 im Grundrisse (Fig. 2) durch $T' \perp T'_1$ dargestellt; der Schnittpunkt A' von T' mit T'_1 ist der Grundriss von A (Achse des Konoids) und die Kuspidalpunkte t, $t_1 \equiv A'$ haben ihre Grund-

risse in A'. Der Halbierungspunkt von $A't = 2d$ ist der Mittelpunkt des Konoides. Es sei t_s der Schatten von t auf π in der Richtung L, die im Grundrisse durch $A't_s = L'$ verzeichnet erscheint. Der Schatten T_s von T geht durch t_s parallel zu T' und schneidet T'_1 im Punkte u' rechtwinkelig. Die in Fig. 1 auftretenden Geraden B, C sind in Fig. 2 in T'_1 vereinigt, so dass wir uns die Eckpunte b, c des Dreieckes $A'bc$ (Fig. 1.) in der Geraden $P_s \perp L'$ durch u' (Fig. 2) mit dem Punkte u' zusammenfallend zu denken haben. Der Schatten T_{1s} von T_1 kommt auf T'_1 zu liegen. Der Kreis (o', r), welcher P_s in u' berührt und durch A' geht, ist der Grundriss einer Ellipse in welcher die Schattenebene (PP_s) das Konoid schneidet und mit ihm eine Gerade $P // P_s$ gemeinsam hat, welche die Achse A in a trifft und in $P' // P_s$ durch A' ihren Grundriss hat. Der Punkt a hat offenbar seinen Grundriss in A' und den Schatten im Fusspunkte a_s des Lotes, welches aus A' auf P_s gefällt wird. Die in Rede stehende Ellipse schneidet T im Punkte v, dessen Projektion im zweiten Schnittpunkte v' von T' mit dem Kreise (o', r) abgebildet erscheint; uv. ist eine Achse der Ellipse und $u'o'v'$ ein Durchmesser des Kreises (o', r). Die Ellipse sei mit (auv) bezeichnet.

Sei M' durch A' der Grundriss irgend einer Erzeugenden M des Konoides, welche die Ellipse (auv) im Punkte e trifft, der seinen Grundriss im zweiten Schnittpunkte e' von M' mit dem Kreise (o', r) hat. Zieht man in diesem Kreise die Sehne $e'f'$ parallel zu L' und verlängert sie bis zum Punkte e_s von P_s, so erhält man in e_s den Schatten von e, und der Schatten M_s von M geht durch e_s parallel zu M'. Bringt man $A'u'$ mit M_s in b_1 zum Schnitte, so ist (Nr. 3) $f'b_1$ normal auf T'_1; es kann also M_s auch konstruiert werden, wenn man einen beliebigen f' des Kreises (o', r) auf P_s in e_s und auf T_1 in b_1 projiziert und b_1 mit e_s verbindet. Hieraus folgt eine einfache Konstruktion der Schlagschattengrenze als Einhüllende von M_s.

13. Nach Nr. 8. findet man m' des Grundrisses E' der Eigenschattengrenze E im Fusspunkte des Lotes, welches aus f' auf M' gefällt wird. Wenn wir über $A'o'$ als Durchmesser einen Kreis $(w, \frac{1}{2}r)$ zeichnen, so liegt der Mittelpunkt g' der Sehne $A'g'_1$ auf diesem Kreise; $m'g'$ steht senkrecht auf L', und $g'm' = g'n' = gA'$. Damit ist die Konstruktion des schiefen Dreiblattes E' wieder gegeben.

Die Figur 2 zeigt auch die Bestimmung der Punkte s', s'_1, s'_2 von E', die in der Richtung L' den Spitzen s_s, s_{1s}, s_{2s} der Schlag-

schattengrenze E_s entsprechen. Den Schnittpunkten von R' mit E' entsprechen in der Richtung L' die Berührungspunkte von R_s mit E_s.

14. Die Schlagschattengrenze der Fläche des Konoides auf sich selbst im Grundrisse ist durch zwei Bögen $s' m'_{1\sigma} i'$ und $s'_1 A'$ verzeichnet. Der Punkt i' von R' ist der Grundriss jenes Punktes i der Randkurve R, welcher seinen Schatten im Schnittpunkte i_s von R_s mit E_s hat. Andere Punkte $m'_{1\sigma}$ von $s' m'_{1\sigma} i'$ auf den Geraden M' erhält man, wenn E_s mit dem Schatten M_s in m_{1s} schneidet und den Schnittpunkt von M' mit der Parallelen zu L' durch m_{1s} ermittelt.

Einfacher kann man aber $s' m'_{1\sigma} i$ als Fusspunktskurve (Nr. 11) des Kreises (o', r) oder als Konchoide (Kardioide) des Kreises $(\omega', \frac{1}{2}r)$ in Bezug auf den Pol A' konstruieren.

Wenn wir o_{1s} o'_1 bis zum Punkte e_1 von M' verlängern, so ist $A' e_1 = e_1 e'$, da auch $A' o'_1 = o'_1 f'$, und $e_1 o'_1 \parallel e' f'$ ist. Es liegt daher der Punkt e_1 auf dem Kreise $(\omega', \frac{1}{2}r)$. Im Parallelogramme $e_1 m'_{1\sigma} m_{1s} o_{1s}$ ist $e_1 m'_{1\sigma} = o_{1s}$ m_{1s} $= r$, denn nach Nr. 10 die Länge der Tangente M_s zwischen den Schnittpunkten mit E_s wird durch o_{1s} halbiert und o_{1s} m_{1s} $= r$ ist. Dies gibt wieder die konchoidale Erzeugung des Grundrisses des Schlagschattens auf die Fläche. Die Kardioide, welche im Grundrisse strichpunktiert verzeichnet ist, hat ihre Spitze in A', ihre Symmetrieachse in $A' o'$; sie berührt E' in den Punkten s', s'_1. s'_2, welche Grundrisse von s, s_1, s_2 der Eigenschattengrenze sind, die ihre Schatten in den Spitzen s_s, s_{1s}, s_{2s} der Steinerschen Kurve haben.

15. Wenn L' mit T'_1 zusammenfällt, so ist E' ein Zweiblatt*), und wenn L' den Winkel zwischen $T' T'_1$ halbiert, so ist E' ein gerades Dreiblatt (trifolium droite).

---

*) V. Jarolímek, „O některých geom. místech přímkových ploch, zejména o zvláštním konoidu kubickém“. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, 1891, str. 14.

VIII.

Letzte Nachträge zur Flora der Balkanländer.

Von Prof. J. Velenovský in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung den 6. Mai 1910.)

Im Verlaufe der bereits verflossenen 8 Jahre, während welcher meine ganze Zeit durch die Herausgabe der „Vergleich. Morphologie" in Anspruch genommen war, haben sich zahlreiche Collectionen botanischer Sammler in den Balkanländern in unserem Institute angehäuft, welche ich nun einer Revision unterzogen und die selteneren Arten dem orientalischen Herbarium einverleibt habe. Es fanden sich darin auch einige kritische und sogar neue Formen und Species, die ich in dieser Abhandlung zusammenstelle oder auf deren Grundlage ich manche Nachträge und Bemerkungen zur „Flora Bulgarica" und ihren Supplementen beifügen konnte. Den grössten Teil bilden die Exsiccate des H. M. Dimonie, Professors in Saloniki, welcher fleissig in verschiedenen Gebirgen Albaniens und Macedoniens gesammelt hat. Es ist dies vor allem das Gebirge Perin (Pirin), welches bisher botanisch fast unbekannt war. Die Ausbeute Dimonies zeigt am besten, wie die Flora Macedoniens vollständig mit der Flora Bulgariens übereinstimmt. Kleinere Beiträge erhielt ich von meinem Freunde, H. Škorpil, aus Bulgarien, ebenso von den H. Mrkvička, H. Urumov in Sofia und Bajev in Loveč. Einige Sammlungen von Bitolia in Macedonien hat H. Dimitrov geschickt.

Die Bestimmung und Feststellung der macedonischen Raritäten wurde mir diesmal ausgiebig erleichtert durch das gewissenhafte und für die Forscher der Balkanflora unentbehrliche Werk des H. Prof. K. Vandas „Reliquiae Formanekianae" Brunae 1909, in welchem die

zahllosen und fast unglaublichen Irrtümer und Confusionen Formánek's auf dem Gebiete der orientalischen Flora richtiggestellt wurden.

Weil die Flora der unteren Donaugebiete und der Umgebung von Varna in Bulgarien manche Aehnlichkeiten mit der Flora von Taurien zeigt, so habe ich hier auch einige Correcturen notiert, die sich bei der Durchsicht der Exsiccatensammlung von Callier ergeben haben. Hiebei sei noch nachdrücklich bemerkt, dass die Flora Südrusslands und des Caucasus recht viele charakteristische Arten enthält, welche der Flora Bulgariens gemeinsam sind, hier aber als eigene Endemiten von den Autoren angeführt werden. Dieses Moment wurde schon in meinem Werke „Flora Bulgarica" betont und wird hoffentlich noch in einer nächsten Abhandlung zur besonderen Besprechung gelangen.

Ranunculus suaneticus Rupr. In m. Vodenica Planina Macedoniae (Dim.) Species certe bona, sed nescio, sitne identica cum caucasica. Flos majusculus, petalis saturate aureis, calyce patule et longe piloso, caule parce patule hirto. Folia glabrata, sinu glandula magna instructa.

R. constantinopolitanus Urv. Tauria (Call.) — non determinatus.

Thalictrum glandulosum Vel. In m. Kajmakcalan in Maced. (Dim.).

Paeonia banatica Roch. In insula Thasos (Dim.).

Barbaraea longirostris Vel. In promontorio Germanica ad rivulos (Maced., Dim.).

Alyssum cuneifolium Ten. In alpinis m. Perin (Dimon.).

A. marginatum Desv. In collibus siccis insulae Thasos (Dim.)

Subularia aquatica L. In lacubus summi m. Rilo augusto 1904 (Mrk.).

Cardamine pectinata Pall. In m. Tikiski Balkan (Ur.), Etropol Balkan (Ur.).

C. silvatica Lk. Borima ad Trojan (Bajev).

Erysimum comatum Pč. Ad Vratica et Trn (Ur.).

Thlaspi alpinum Jcq. In alpinis m. Rilo (Vel.), m. Vitoša (Ur.). Nimis simile et affine *T. Kovátsii* Heuff, a quo tantum stylo valde elongato dignoscitur, praeterea videtur racemus fructifer brevior. Fortasse est *A. Kovátsii* varietas magis orientalis *T. alpini.*

Nasturtium terrestre Tsh. Ad Draganovo, Dragalevci (Ur.). Est certe hybrida e *N. austriaco* et *N. silvestri.*

Hesperis Steveniana DC. Planta a *Calliero* in Tauria (!) lecta habet quidem in calyce et siliqua pilos, sed omnes ceterae notae perfecte cum bulgaricis conveniunt, qua re persuasum habeo, plantam bulgaricam eandem speciem exhibere. Conf. Fl. bulg. Suppl. I.

Papaver alpinum L. In m. Perin (Dim.).

Corydalis solida Sw. var. *densiflora* Presl. Hagion Oros, Vodena, Caraferia (Dim.).

C. Wettsteinii Adamov. In dumosis m. Hagion Oros (Dim.). Species certe curiosa, *C. cavam* Schw. revocans, sed ad *C. solidam* pertinens, racemo valde laxo elongato, bracteis nunc indivisis ellipticis, nunc 1—2 dentibus praeditis, foliorum laciniis fere linearibus.

Fumaria parviflora Lam. Ad Abobam (Bulg., Škorp.).

Viola elatior Fr. Ad Trn (Ur.).

V. arenaria Dc. Ad Belledihan (Mlde).

V. pratensis M. K. Ad Petrohan (Ur.).

V. Allchariensis in m. Rhodope leg. *Urumov.*

V. Beckiana Fiala. Macedonia: in m. Porta ad Huma, m. Doxa ad Caraferia, m. Cara-tach ad Vodena (Gramatovica) leg. *Dimonie.*

V. poetica Boiss. Sprun. In saxosis m. Perin (Dim.). *V. Grisebachiana* Vis. Pč. in Serbia obvia certe ad eandem speciem spectat. Etiam *V. scardica* Nym. hucce adnumeranda est.

V. Zoysii Wulf. var. *frondosa* m. In pascuis alpinis m. Porta ad Huma (Maced., Dim.). A *V. Zoysii,* in Bosnia (m. Bjelašnica) collecta diversa: indumento minute puberulo, foliis crenulatis rotundatis, stipulis magnis 2—3 lacinulis linearibus praeditis, sepalis magnis frondosis late lineari-ellipticis apice obtuse rotundatis, totis circiter dentatis, calcare calycis appendices vix excedenti, petalis minoribus luteis et violaceo-variegatis.

Hypericum perforatum L. var. *moesiacum* Vel. In pascuis reg. montanae m. Nisi-dagi ad Batecinam (Dim.). Planta revera curiosa foliis tenuiter linearibus, floribus typo dimidio minoribus, petalis valde nigro-glandulosis. Sed iterum desunt fructus. Planta elata, ramosa.

H. Dimoniei sp. n. Perenne, glabrum, glauco-virens, *pumilum* (3—8 *cm*), caulibus e radice ramosa numerosis ascendentibus *dense fere imbricatim foliosis* apice cyma 3—5 flora terminatis, foliis *linearis oblongis* integris *sessilibus* planis *prorsus epunctatis* (apice tantum hinc et inde 1—2 pellucido-punctatis), bracteis integris, calycis foliolis *magnis rotundatis* membranaceis mucronatis integris epunctatis, corolla lutea calyce duplo longiori, capsula?

In collibus siccis ad pag. Huma Macedoniae leg. *Dimonie.*

Species e proxima affinitate *H. olympici* L., cujus flores habet, sed folia sunt nec pellucido — nec nigro-punctata plana dense in caule congesta imbricata, planta pumila dense caespitosa. — *H. orbiculare* Halàcsy (1890) est tantum forma *H. olympici* floribus minoribus, cujus omnes transitus ad formam calycibus magnis heterophyllis e Bulgaria (etiam in ipso m. Rhodope) possideo. — Varietatem *H. olympici* majoris dignitatis exhibet planta, quam Haussknecht a. 1885 in m. Pindo (Agrapha — monast. Corona) collegit. Haec possidet sepala lanceolata longe sensimque acuminata crebre nigro-punctata, etiam petala nigro-punctata, folia densissime pellucido- et nigro-punctata (*H. olymp.* var. *coronense* m.).

H. rhodopeum Friv. In m. Perin (Urumov).

H. Montbretii Spr. Bracigovo, Hain Buaz (Ur.).

Genista moesiaca Vel. In. m. Musala (Mrk.), m. Perin (Dim.).

G. carinalis Grsb. Ad Rilo Selo (Ur.).

Cytisus Jankae Vel. Aboba (Šk.), Dupnica (Ur.).

Trigonella uncinata Bess. (Tauria, Callier uti T. spicata S. S. determinata). T. uncinata Bess. (T. hamosa M. B.) taurica et caucasica certe specifice a Graeca discedit, quamquam huic valde affinis est. *T. uncinata* habet caulem strictum rectum et ut folia fere glabrum, foliorum petiolum stipulis parum vel vix longiorem, foliolis lineari-elongatis truncatis, medio vix longiori petiolulato, spica fructifera cylindrica elongata, legumine fere glabro. *T. spicata* S. S. graeca contra habet caules arcuato-ascendentes unacum foliis longe pilosos, foliorum petiolum stipulis 2—4 longiorem, foliolis obovatis et obovato-cuneatis, medio caeteris 2—3plo longiore petiolulato, spica fructifera breviori, legumine longe piloso.

T. gladiata Stev. Ad Loveč, Perustica (Ur.).

Trifolium hirtum All. Ad Peštera (Ur.).

T. subterraneum L. Ad Jahrare (Ur.).

T. strictum L. Ad Rilo Selo (Ur.).

T. tenuifolium Ten. Ad Batecina Maced. (Dim.).

T. gracile Th. Ad Batecina Maced. (Dim.).

T. Velenovskyi Vandas. In m. Perin (Dim.).

Anthyllis aurea Vis. prope Huma Maced. (Dim.).

A. Vulneraria K. var. *vitellina* m. Humilis, caespitosa, tota sericeo-cana, foliis 3—7foliolatis, foliolis ellipticis, calycibus pallidis patule longe pilosis, corollis ut in typo, sed aureo-vitellinis. Stirps quasi parallela ad *A. Webbianam* Hook. In saxosis m. Perin Macedoniae (Dim.).

Oxytropis campestris DC. In m. Perin (Dim.).

O. Prenja Beck. In m. Perin (Dim.).

Astragalus albicaulis DC. Ad Abobam Bulgar. (Šk.).

A. monspesulanus L. Ad Abobam Bulgar. (Šk.).

Lotus uliginosus Schk. Ad Bitoliam (Dim.).

Medicago carstiensis Jcq. Prope Zvonci Bulgar. (Urumov).

Orobus Škorpili Vel. In m. Kecikaja ad pag. Huma, m. Caratach ad Gramatovica Macedoniae (Dim.).

Vicia lutea L. var. *bicolor* m. Breviter pilosa, foliis fere glabris, foliolis latiuscule obovato-ellipticis truncatis breviter setuliferis majusculis, corolla lutea alis coeruleis. Corolla similis ut in *V. melanops* S. S. sed characteres caeteri ad *V. luteam* pertinent. Hagion Oros, in pratis ad coenobium Prodrom (Dim.).

Lathyrus grandiflorus S. S. Ad Dupnica Bulgar. (Ur.). Planta pulcherrima, floribus permagnis 1—3nis in pedunculo folium excedenti, foliolis unijugis late ellipticis, stipulis minutis setaceis, calyce late expanso patelliformi.

Arenaria biflora L. In m. Perin (Dim.).

Moenchia quaternella Ehr. Hagion Oros (Dim.).

Alsine Škorpili Vel. In m. Suha rupa ad Huma (Dim.). Identica cum *A. Baldaccii* Hal. Conf. Vandas l. c. pag. 102.

A. recurva All. var. *orbelica* Vel. In m. Perin (Dim.).

Cerastium petricola Pč. Ad Huma et in m. Perin (Dim.).

C. Saleirolii Ser. In m. Perin (Dim.).

C. orbelicum Vel. In m. Nisidag, m. Perin (Dim.).

C. banaticum Roch. var. *minus* Vel. In m. Porta Huma (Dim.). Fortasse species propria. Gracilior, foliis rigidioribus angustioribus, indumento magis cano fere eglanduloso ad caulem reverse piloso, floribus minoribus.

Dianthus callosus Vel. Ad Pastuša Bulgariae (Ur.). Nunc accepi pulchra specimina, e quibus certe patet, hanc plantam speciem propriam bonam exhibere. Ab affini *D. gracili* S. S. dignoscitur: floribus saepius minoribus, squamis involucrantibus rotundatis brevissime mucronatis, foliis inferioribus latioribus non acuminatis sed breviter fere obtusis margine crasso calloso cinctis. Hac posteriori nota revocat folia *D. myrtinervii* Grsb.

D. Šuškalovići Adam. est identicus cum *D. gracili* S. S. var. *armerioides* Grsb. (Albania, Gornjo Vodno) et vix ut species propria enumerandus est.

D. purpureo-luteus Vel. In m. Germanica (Dim.).

D. Pančičii Vel. In m. Perin (Dim.).

D. pseudocorymbosus Vel. (D. corymbosus Vel. Fl. Bulg. — non Sibth. Fl. Gr.). *D. corymbosus* Florae Graecae est quidem valde affinis, sed differt floribus majoribus minus fasciculatis, petalis subtus flavis.

D. Musalae Vel. In m. Perin (Dim.). Species certe propria, a *D. microlepide* Boiss. diversa. Characteres immutati ubique apparent.

D. microlepis Boiss. In m. Perin (Dim.).

D. integer Vis. In m. Porta ad Huma (Dim.).

Silene fabarioides Hauskn. In m. Perin (Dim.).

S. inflata Sm. var. *orbelica* Vel. In m. Kecikaja ad Huma (Dim.).

S. radicosa B. H. In m. Kajmakcalan (Dim.).

S. graminea Vis. In m. Perin (Dim.).

S. Lydia Boiss. In graminosis ad Bitoliam leg. *Dimitrov*. Specie. in flora europaea nova, hactenus in Lydia, Cappadocia, Phrygia nota. Annua, habitu *S. conicam* revocans, sed viridior viscido-puberula, foliis linearibus acuminatis, calyce in dentes longe subulato-acuminatos partito glanduloso et longe patule piloso, capsula in rostrum tenue abrupte attenuata, calyce breviori facile dignoscenda.

S. Juvenalis Del. (S. subconica Friv.). In tota Macedonia et Turcia late obvia.

S. acaulis L. In m. Perin (Dim.).

S. pontica Brdza. In arenosis ad Samokov — ergo non ad mare (Ur.).

S. media Vel. In m. Vitoša (Ur.).

S. macropoda Vel. In montibus Macedoniae late obvia (Dim.).

Heliosperma trojanensis sp. n. Perennis, caespitoso-multicaulis, caulibus teneris iteratim dichotomo-ramosis foliosis glabris, floribus solitariis longe pedicellatis, foliis linearibus acutis sparse pilosis, cayce oblongo-turbinato sparse glanduloso virenti dentibus oblongis obtusis, lamina parva *lutea oblongo-spathulata in unguem glabrum sensim attenuata retusa* (edentula non quadridentata) coronae dentibus longis subulatis integris, capsula calycem excedenti ellipsoidea carpophoro duplo longiori, seminum nigrescentium crista longe ciliata.

In saxosis m. Trojan Balkan supra fluvium Rogačov julio a. 1908 legit Bajev.

Caulis 20 *cm*, folia 2 *mm* lata et 2—3 *cm* longa, capsula unacum carpophoro 4—5 *mm*. Species cum nulla nota affinis propter petalorum formam et colorem.

Tunica thessala Boiss. Ad Batecinam (Dim.).

Linum spicatum Lam. In ins. Thasos (Dim.).

Geranium subcaulescens Her. In alpinis m. Porta ad Huma (Dim.).

G. reflexum L. M. Kacikaja ad Huma (Dim.), in m. Rhodope supra Stanimaka Bulgariae (Stř.).

Haplophyllum balcanicum Vand. In collinis siccis ins. Thasos (Dim.).

Saxifraga Aizoon L. var. *cultrata* Schott. Elatior, foliis valde elongato-linearibus obtusis. Ad Sokolec Bulgariae (Mrk.).

S. Ferdinandi Coburgi Sündermann. In saxosis alpinis m. Perin (Dim.). Species valde affinis *S. luteo-viridi* Sch. Ky, cujus habet habitum et magnitudinem, sed certe specifice ab ea dignoscitur foliis minoribus angustissime linearibus dense imbricatim confertis, sepalis acutis breviter sparse glandulosis, petalis multo majoribus calycem duplo superantibus.

S. luteo-viridis Sch. Ky. In m. Perin (Dim.). Congrua cum speciminibus transsilvanicis, robustior, caule unacum inflorescentia dense longeque glanduloso-villoso floribus majoribus sed petalis minoribus calycem parum excedentibus, foliis oblongo-ellipticis coriaceis.

S. porophylla Bertol. In m. Doxa ad Caraferia et ad Huma Maced. (Dim.).

S. scardica Grsb. In m. Perin (Dim.).

S. oppositifolia L. var. *meridionalis* Terrac. In m. Perin (Dim.). Etiam planta bulgarica (Fl. Blg.) hucce spectat.

S. exarata Vill. In m. Perin (Dim.).

S. bryoides L. In m. m. Perin (Dim.).

S. discolor sp. n. *Annua, valde glanduloso-pilosa*, caule erecto (5—10 *cm*) solitario a basi vel superius stricte ramoso folioso, foliis radicalibus *dense confertis* in petiolum brevem attenuatis carnosulis integris vel apice obtuse 3dentatis, caulinis trilobis, floribus corymboso-cymosis circa 5—12nis, *fructu pedicellum valde superanti*, calycis laciniis ovatis receptaculum subaequantibus, petalis obovato-cuneatis *calyce 3—4plo longioribus primum albis dein purpureis.*

In saxosis m. Perin (2400 *m*) augusto 1909 leg. *Dimonie.* Affinis *S. controversae* Sternb., sed indumento copiosiori, foliis latioribus, floribus majoribus, petalis longioribus discoloribus differt.

Umbilicus horizontalis DC. Athos ad coenob. Prodrom (Dim.).

Cnidium venosum K. Ad Bitoliam (Dimitrov).

Eryngium palmatum Boiss. Ad Trn (Ur.).

Carum Carvi L. In m. Vitoša (Ur.).

Peplis Portula L. Ad Orhanie (Ur.).

Pyrus amygdaliformis Vill. In Tauria (Callier — sub P. nivali Jcq.).

Rosa cinnamomea L. In alpinis m. Vitoša et Rilo (Ur.).

Anthemis Cotula L. In Tauria (Call. — sub A. arvensi L.).

A. Georgievi Davidov. Ad Varnam. Est *A. virescens* Vel.!

A. carpathica W. K. In m. Perin (Dim.).

A. riloensis Vel. In m. Smigelica Maced. (Dim.).

Aster alpinus L. Bulgaria: m. Vitoša, Vežen, Trn (Ur.), in m. Perin Macedoniae (Dim.).

Achillea Urumoffii Hal. In m. Rilo (Ur.).

A. odorata L. Ad Bitoliam (Dimitrov).

A. leptophylla MB. Ad Abobam (Šk.).

A. holosericea S. S. In m. Kecikaja, m. Kajmakcalan (Dim.).

A. pseudopectinata Jka. In m. Perin (Dim.).

A. lingulata DC. In m. Perin (Dim.).

A. multifida DC. In m. Perin (Dim.).

A. ageratifolia S. S. Ad Huma (Dim.).

Bellis hybrida Ten. Hagion Oros (Dim.).

Artemisia Baumgarteni Bess. In m. Perin (Dim.), m. Rilo (Vel. Fl. Blg. sub A. Mutellina).

Bidens orientalis Vel. Ad Bitoliam (Dimitrov).

Senecio saracenicus L. M. Mara Gidik, Topli Dol, Vitoša (Ur.).

S. Urumovi Vel. 1902 est identicus cum *S. umbroso* WK.

S. transsilvanicus Schur. In m. Perin (Dim.).

S. erubescens Pč. In m. Dimcovo Pole (Dim.).

S. carpathicus Herb. In m. Perin (Dim.).

Doronicum caucasicum MB. Hagion Oros, Vodena, Caraferia (Dim.).

Leontopodium alpinum Cass. var. *perinicum* m. In saxosis m. Perin augusto 1909 leg. *Dimonie.* A typico, quod in m. Balkan lectum comparo, discedit: statura compacta pulvinari, caulibus florentibus e caespite vix excedentibus (3—5 *cm* altis), foliis inferioribus minoribus utrinque araneosis obovato-cuneatis obtusis, involucri bracteis capitula haud excedentibus. Ulterius observetur. Si transitus non inveniuntur, certe species bona.

Centaurea orbelica Vel. In m. Perin (Dim.).

C. psilacantha B. H. In saxosis regionis montanae ad lacum Ostrov Maced. (Dim.).

Carduus pycnocephalus L. Ad Abobam (Šk.).

Lactuca sagittata W. K. Deli-Orman (Ur.).

Crepis praemorsa Tsh. var. *longifolia* m. Borima ad Trojan (Bajev). Foliis magis elongatis sensim acutatis evidentius dentatis.

Mulgedium alpinum Less. M. Jumrukčal, Maragidik, Rhodope (Ur.), m. Perin (Dim.).

Scorzonera lanata MB. In insula Thasos (Dim.).

S. rhodantha Hsskn. In m. Kajmakcalan (Dim.).

Leontodon intermedius Vel. In m. Smigelica (Dim.).

Hypochoeris Pelivanovići Petr. In m. Smigelica (Dim.).

Hieracium petraeum Friv. In m. Perin (Dim.).

Campanula pusilla Hke. var. *perinica* m. In m. Perin (Dim.). Dense caespitosa, confertior, humilior.

Valerianella eriocarpa Dsv. Tauria (Callier — sub *tridentata* Stev.).

Trichera hybrida R. S. var. *pinnatifida* m. Ad Thessalonicam (Dim.). A plantis bulgaricis et serbicis discedit foliis omnibus pinnatifidis laciniis anguste linearibus longe acuminatis, involucri phyllis angustioribus longius tenuiter acuminatis.

Armeria alpina L. In m. Perin (Dim.).

Plantago monosperma Pourr. M. Porta ad vicum Huma (Dim.).

Utricularia Jankae Vel. Ad Pasarel (Mrkv.).

Vincetoxicum speciosum Boiss. Sprun. Diagn. Ser. I 4, pag. 39 In subalpinis m. Rilo a. 1905 leg. *Urumov.* Corolla atropurpurea revocat *V. fuscatum* Rchb., sed color ejus intensior, corolla plus duplo major *lobis intus valde villosulis*, inflorescentia subsessili multi- et densiflora, pedicellis florem adaequantibus unacum calyce valde crispolanatis, *caule valde elato* (planta vulgo robusta bipedalis) folioso supra inflorescentias numerosas spicatim gerenti ab eo praeter alia valde discedit. Folia sunt breviter petiolata una cum caule valde crispule villosa, inferiora late cordata, superiora elongato-lanceolata longe acuminata. Proxime in m. Athos notum erat.

Echinospermum barbatum Lehm. Tauria (Callier — sub *E. Lappula*), Aboba (Šk.).

E. Škorpili Vel. Aboba, Balčik (Šk.).

Rochelia stellata Rchb. Tauria (Callier — sub *Echinosp. barbato*). Certe in Bulgaria boreali obvia.

Onosma tubiflorum Vel. Ad Ellidere (Ur.), Samokov (Mrkv.).

Alkanna Stříbrnyi Vel. Monaster. St. Kirik, Kočagovo (Ur.).

Anchusa moesiaca Vel. Bracigovo (Ur.).

Heliotropium suaveolens MB. Ad Čepino (Ur.).

Borago orientalis L. (Psilostemon or. DC.). Ad Sozopolin leg. *Škorpil*. Etiam ad Byzantium notum est.

Verbascum thracicum Vel. In Macedonia sat frequens (Dim.).

V. Dimoniei sp. n. Elatum, ca 60 *cm* altum, foliis radicalibus breviter petiolatis *oblongo-lanceolatis integris* breviter acutis planis albo-tomentosis, caulinis oblongo-ellipticis integris sessilibus, superioribus valde diminutis lanceolatis acuminatis, caule *glabrescenti* rubescenti a medio in ramos strictos simplices floriferos diviso, bracteis minutis lanceolato-linearibus acutis, florum fasciculis *remotis 3—5 floris*, pedicellis calycem adaequantibus, calycis laciniis linearibus unacum bracteis *virentibus et glandulosis* (3 *mm* longis), corolla lutea albo-tomentosa, lana filamentorum alba, capsula ellipsoidea tomentosa.

In pascuis collinis ad Feticam Macedoniae a. 1909 leg. *Dimonie*. Affinitate et habitu proxime accedit ad *V. leucophyllum* Grsb., quod autem differt: foliis inferioribus lobulatis, floribus majoribus non glandulosis.

V. crenatifolium (Callier, Tauria) est identicum cum *V. pulchro* Vel.

Digitalis viridiflora Lndl. In m. Perin (Dim.).

Trixago apula Stev. In m. Kecikaja Maced. (Dim.).

Lindernia pyxidaria All. Etropol, Orhanie (Ur.).

Veronica Musalae Vel. In m. Vitoša (Mrkv.).

V. montana L. Borima ad Trojan (Bajev), Tikiski Balkan (Ur.).

V. Kindlii Adam. 1904. In alpinis m. Porta, m. Kajmakčalan (Dim.).

Scutellaria Columnae All. var. *rhodopea* Vel. Ad Batecina (Dim.).

Stachys Iva Grsb. In m. Suha rupa ad Huma Macedoniae (Dim.).

S. viridis B. H. Ad Batecina, m. Nisidag (Dim.).

Sideritis scardica Grsb. Ad Batecina, Huma (Dim.).

Origanum viridulum Martr. (O. viride Boiss.). Ad Batecina (Dim.).

Betonica graeca Boiss. In m. Kajmakčalan (Dim.).

Salvia officinalis L. var. *thasia* m. In olivetis insulae Thasos (Dim.). Planta mirabilis, sed in primo stadio evolutionis, desunt fructus et calyces fructiferi. Folia latiora, majora, tota inflorescentia dense albo-pilosa, calycis longe denseque albo-pilosi vix prominule nervosi minus glandulosi labia minus expansa dentibus omnibus herbaceis purpurascentibus non aristatis, inferioribus lanceolatis, superioribus brevissimis lanceolato-triangularibus.

Calamintha suaveolens Boiss. var. *acuminata* m. In m. Rhodope ad Pešteram (Ur.). Statura et omnibus notis typo respondens, sed: folia longius petiolata angustiora longeque acutissime acuminata praesertim floralia fere linearia, calycis dentes angustiores multo longius aristati.

C. graveolens Bth. Kočagovo (Ur.), Aboba (Šk.).

Satureja subspicata Vis. var. *macedonia* m. Foliis fere glabratis, inflorescentia conferto-spicata, statura pumila caespitoso-lignosa convenit, sed folia obtusiora, calycis dentes breviores et caulis circiter breviter pilosus. In m. Corab (Dim.). Revisio hujus affinitatis necessaria est. Genus in Oriente certe summopere variabilis.

Thymus ocheus H. S. In m. Perin (Dim.).

T. hirsutus M. B. Ad Huma, in m. Perin et alibi in Macedonia frequens (Dim.).

T. pulvinatus Čel. v. *perinicus* m. In m. Perin (Dim.). Foliis oblongo-linearibus et fere oblongo-ellipticis dense puberulis praetereaque ciliatis. Transitum praebet ad plantam in Amasia (Ak-Dagh) a *Bornmüller* lectam. Et haec transit ad plantam originalem in m. Ida Troadis (Sintenis) lectam.

T. balcanus Borb. var. *albiflorus* m. In m. Osenovo ad fines Bulgariae (Dim.). Foliis et bracteis eximie coriaceïs crasse nervosis oblongo-spathulatis, capitulis minoribus, corollis albis

Daphne pontica L. In m. Kale-Bahir ad Sozopolin leg. *Škorpil*. Proxime ad Byzantium nota est.

Tulipa Grisebachiana Pantocsek. In saxosis insulae Thasos (Dim.). Bene respondet descriptioni autoris, habet flores minores ac *T. silvestris* L., perigonio luteo, phyllis externis dorso rubellis acutissimis basi longe dense hirtis apice sparse pilosis, filamentis et ovario longe hirtis, foliis angustioribus, statura graciliori.

Asphodeline taurica Kth. Ad Vodena Macedoniae (Dim.).

Ornithogalum orbelicum Vel. In m. Doxa prope Caraferiam (Dim.).

Fritillaria tenella MB. Ad Bistrica (Ur.).

Allium Ampeloprasum Callier (Tauria) est *A. sphaerocephalum* L.

A. paniculatum Callier (Tauria) est *A. pulchellum* Don.

A. tenuiflorum Ten. Ad Batecinam (Dim.).

Polygonatum multiflorum All. Borima ad Trojan (Bajev).

Iris pumila Callier (Tauria) est *I. suaveolens* Boiss.

I. grandis Vel. Species haec colitur in nostro horto. Ab *I. pumila* dignoscitur: foliis latioribus, spathae valvis brevioribus obtusioribus perigonii tubo breviori vix exserto phyllis externis brevioribus oblongis.

versus basin sensim angustatis et hic latis planisque parte superiori ad margines involutis, internis ovatis vel fere ovato-cordatis basi fusco-venosis, stigmatis lobis latis breviter acutis, anthera ad stigma usque attingenti filamento subbreviori, colore perigonii coerulescenti-violaceo intensius venoso.

Planta viva ab omnibus formis europaeis *I. pumilae* valde diversa et certe speciem propriam exhibens.

Crocus speciosus MB. Ad Stanimaka, Haskovo (Stř.). A *C. pulchello* Herb. perigonio multo majori, filamentis anthera duplo brevioribus minutissime velutinis dignoscitur.

C Škorpili Vel. Hanc pulchram speciem hactenus e paucis individuis notam colimus nunc in horto nostro (circ. 50 exempl.) unacum bulgaricis flavifloris *C. moesiaco* et *C. chrysantho*, a quibus ut species egregia excellit. Diagnoses eorum in vivo notatae sunt:

C. moesiacus Ker. Folia latissima, flores majores, perigonii tubus fuscus, etiam perigonii phylla externa basi dorso fuscescentia, filamentum antherae aequilongum, stigmatis flavi laciniae 3 late infundibuliformes simplices stamina attingentes, squamae bulbi non annulatae parallele fimbriatae fimbriis crassioribus.

C. Škorpili Vel. Folia angustiora, flores paulo minores, perigonii tubus unacum phyllis flavus, filamentum anthera 3plo brevius, stigmatis flavi laciniae 3 iteratim in lacinulas anguste lineares divisae ad medium antherae attingentes, squamae bulbi non annulatae parallele fimbriatae fimbriis tenuissimis nitidis.

C. chrysanthus Herb. Folia tenuissime linearia firma, flores multo minores, perigonium totum flavum, filamentum anthera 4plo brevius, stigmatis croceo-vitellini laciniae 3 simplices sensim infundibuliformi-incrassatae ad medium antherae attingentes, squamae bulbi minoris annulatae. Floret 15—20 dies prius quam antecedentes.

Zannichellia pedicellata Fr. Aboba, Devno, Balčik (Šk.).

Carex pendula Huds. Borima ad Trojan (Bajev).

C. vulpina L. var. *compacta* Vel. Bitolia (Dimitr.).

Eriophorum Scheuchzeri Hpe. In m. Kajmakćalan (Dim.).

Melica pyramidalis Lam Hagion Oros (Dim.).

Poa ursina Vel. In m. Musala (Mrkv.).

Ammophila arenaria Lk. In arenosis maritimis ad Kamčija (Šk.).

Festuca fenas Lag. In m. Kozata Stena (Baj.).

F. heterophylla Lam. Ad Loveč (Baj.).

F. xanthina R. Sch. In m. Kozata Stena (Baj.).

F. Pančičiana Hack. In m. Kozata Stena (Baj.). Valde caespitosa, culmis robustis vaginis radicalibus altis eximie roseis.

Koeleria Degeni Dom. (K. lobata MB., R. Sch.). In collinis graminosis siccis ad Abobam leg. *Škorpil*. Plantula parva glabra, foliis brevibus, rigidis, culmis caespitosis basi bulbosis vaginis imbricatim obtectis, spica brevi ovata virenti-nitida. Nota in vicina Romania, Tauria et Bessarabia.

Hordeum nodosum C. Koch (Ledeb. Fl. Ross. p. 329 IV, H. violaceum Vel. Fl. Blg. Suppl. p. 301).Hucce spectant specimina bulgarica. *H. nodosum* C. Koch. provenit etiam in Armenia rossica meoque sensu ab *H. secalino* Schrb. ut species separandum. *H. violaceum* Boiss. Huet secundum specimina caucasica (Kneucker, Gramin) est species diversissima, elatior, spicis totis violaceis angustioribus elongatis, glumellis minoribus equidem muticis, aristis glumellas vix superantibus.

Asplenium septentrionale Hoffm. var. *gracile* Vel. In m. Germanica (Dim.).

Allosorus crispus Brnh. In m. Perin (Dim.), Musala (Mrkv.).

IX.

Über die intracellulare Agglutination und verwandte Erscheinungen bei Pelomyxa und anderen amoebenartigen Organismen.

II. Mitteilung.

Von **Antonín Štolc.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Mai 1910.)

I.

In diesem Berichte will ich weitere Beobachtungen und Betrachtungen über die intracellulare Agglutination und verwandte Erscheinungen bei *Pelomyxa* sowie bei anderen amoebenartigen Organismen anführen.

Vor allem soll hier die Entstehung der Hüllmembran der Glanzkörper bei Pelomyxa erwähnt werden.

Ich habe bereits dargelegt, dass diese Membran aus einem, schwerer als Glykogen auflösbaren Kohlenhydrate besteht.

In Bezug auf die Entstehung und Bedeutung dieser Membran bin ich mittlerweile zu einer anderen Ansicht gelangt, als es jene war, die ich in einer früheren Abhandlung*) vertreten habe.

Ich nehme nämlich an, dass es eben das Agglutinin der Glanzkörper ist, durch dessen Einwirkung die Hüllmembran zur Entstehung gelangt. Dieses Agglutinin wirkt auf die Oberfläche der Glanzkörper ein und bildet aus einem leicht auflösbaren Kohlenhydrate (aus Glykogen) ein schwerer auflösbares Kohlenhydrat, welches wie-

*) Antonín Štolc: Beobachtungen und Versuche über die Verdaunung und Bildung der Kohlenhydrate bei einem amoebenartigen Organismus, Pelomyxa palustris Greeff. (Zeitschr. f. wissenschaft. Zoologie 68. B. 1900.)

derum unter dem Einflusse eines besonderen Lysins der Glanzkörper aufgelöst wird. Die Wirkung dieses Lysins äussert sich dann, wenn *Pelomyxa* hungert, wenn eine sichtbare Massenagglutination der erschöpften, schon glykogenfreien Glanzkörper stattfindet.

Wenn es der Pelomyxa an hinreichender Nahrungszufuhr nicht mangelt, ist die Wirkung des Lysins nicht wahrnehmbar. Dieselbe ist dadurch maskiert, dass die Abnahme der Hüllmembran bei den Glanzkörpern, hervorgerufen durch die Wirkung des Lysins, in dem aus der Wirkung des Agglutinins sich ergebenden fortwährenden Zuwachs ihren Ersatz findet.

Meine Ansicht geht nun dahin, dass auch das Kernagglutinin (Karyoagglutinin) ähnliche Wirkungen, wie das Agglutinin der Glanzkörper hervorruft. Denn in ähnlicher Weise, wie nämlich das Agglutitin der Glanzkörper die Entstehung der Hüllmembran bei den Glanzkörpern bedingt, bedingt auch das Kernagglutinin die Entstehung der Kernmembran.

Das Kernagglutinin wirkt auf die Oberfläche der Kernmasse ein und bildet dadurch aus derselben einen mebranartigen Niederschlag oder die Kernmembran. Die Oberfläche des Kernes wird also durch das Kernagglutinin dazu praepariert um infolge der Einwirkung des Kernlysins aufgelöst zu werden und auf diese Weise das zur Bildung eines neuen Protoplasmas oder einer neuen lebenden Materie nötige Material zu liefern. Die Wirkung dieses Lysins aüssert sich zur Zeit, wo *Pelomyxa* hungert und eine offenbare Masenagglutination der Kerne stattfindet. Zur Zeit genügender Nahrungszufuhr tritt die Wirkung des Kernlysins nicht klar in Erscheinung, dieselbe wird vielmehr maskiert. Diese Tatsache ist dadurch zu erklären, dass die unter der Einwirkung des Kernlysins hervorgerufene Abnahme der Kernmembran durch fortwährenden, unter dem Einflusse des Kernagglutinins sich ergebenden Zuwachs ersetzt wird.

II.

Die Agglutination von erschöpften Glanzkörpern, sowie ihre Auflösung und die Agglunation der Kerne, ferner die Auflösung ihrer oberflächtichen Teile, sind spezifische Vorgänge.

Hier handelt es sich um Wirkungen spezifischer Stoffe, (spezifisches Agglutinin und spezifisches Lysin), durch welche die erschöpften Glanzkörper agglutiniert und aufgelöst werden. Ferner sind es Wirkungen von anderen besonderen Stoffen, (Karyoagglutinin und Karyolysin), durch welche die Kerne agglutiniert, und ihre

oberflächlichen Teile aufgelöst werden. Die Agglutination der erschöpften Glanzkörper mit den Kernen ist ein nicht spezifischer Vorgang. Mit Rücksicht auf die oben angeführten spezifischen Vorgänge tritt dieser Vorgang in kvantitativer Beziehung bedeutend in den Hintergrund. Wenn *Pelomyxa* hungert, und wir nach einer bestimmten Zeit im Protoplasma zahlreiche Gruppen von unter einander agglutinierten erschöpften Glanzkörpern und andere zahlreiche Gruppen von unter einander agglutinierten Kernen finden, beobachten wir daselbst gleichzeitig hie und da einen mit einem oder mehreren erschöpften Glanzkörpern agglutinierten Kern, eventuell einen Kern, der mit einer Gruppe wiederum unter einander agglutinierter erschöpfter Glanzkörper agglutiniert ist.

Dieser nicht spezifische Vorgang findet seine Erklärung darin, dass durch die Einwirkung eines spezifischen Agglutinins und eines spezifischen Lysins auf die Hüllmembran der Glanzkörper ein besonderer Kolloidstoff entsteht und durch die Einwirkung eines anderen spezifischen Agglutinins und Lysins auf die oberflächlichen Teile der Kerne ein anderer besonderer Kolloidstoff entsteht. Beide diese besonderen Kolloidstoffe sind jedoch in physikalischer Beziehung verwandte Stoffe, so dass mit ihrer Hilfe die erschöpften Glanzkörper und Kerne unter einander agglutinieren können.

III.

Bei *Pelomyxa* kann sich auch der Fall ereignen, dass die bei derselben vorkommenden symbiotischen Bakterien nicht nur an der Oberfläche der Kerne sondern auch an der Oberfläche der Glanzkörper agglutiniert sind.

Diesbezüglich kann ich ein bezeichnendes Beispiel anführen. Am 22. November 1895 verschaffte ich mir behufs weiteren Studiums frisches Pelomyxamaterial aus dem bekannten Fundorte in der Nähe Prags, nämlich aus dem Tümpel im Ďáblitzer Walde auf dem Ladvíberge. Der Tümpel war damals bereits mit einer dünnen Eiskruste bedeckt, und ich musste das nötige Material unter der Eisfläche suchen. Am 25. November untersuchte ich zu Hause das gewonnene Material und fand einzeilne Exemplare der Pelomyxa, bei denen die symbiotischen Bakterien massenhaft im Plasma vorkamen und überdies nicht nur an der Oberfläche der Kerne, sondern auch an der Oberfläche der Glanzkörper agglutiniert waren. So fand ich z. B. bei einem Exemplar mit Glykogen gefüllte Glanzkörper von verschiedenen Dimmensionen: die kleinsten waren bedeutend kleiner,

als der Kern, während die grössten etwas grösser waren als der Kern; die Oberfläche aller Glanzkörper war dicht mit agglutinierten Bakterien bedeckt.

Im Sommer 1909 konnte ich ein umfangreiches, aus dem Moorwasser in Sct. Veit bei Wittingau stammendes Material studieren. Nebst verschiedenen interessanten Amoeben fand ich darunter auch Grubers Species, Amoeba binucleata. Diese, äusserst charakteristische Amoeba erhielt sich lange in einem in meinem Arbeitszimmer in Prag aufgestellten Kulturgefässe.

Zahlreiche, von mir untersuchte Exemplare waren etwa von der Grösse der *Amoeba proteus*, wiesen eine kugelige oder ovale Form auf, und ihre Bewegungen waren langsam. In dem ziemlich zähen Protoplasma kamen in der Regel zwei ausnehmend charakteristische grosse Kerne von körnigem, im Kerne gleichmässig verteiltem Chromatingehalte vor. Das Protoplasma enthielt ferner zahlreiche grosse Vakuolen und zahlreiche grosse Glanzkörper, die wohl identisch waren mit jenen Körpern, welche Gruber bei der Diagnose seiner Amoebe als „grosse Fettkugeln« anführt, die jedoch mit den Glanzkörpern der *Pelomyxa* identisch sind.

Im Protoplasma kamen endlich massenhaft symbiotische fadenförmige Bakterien vor und ebensolche waren diesmal nicht an beiden Kernen, sondern an der Oberfläche der Glanzkörper agglutiniert.

Die hier angeführten zwei Fälle (bei *Pelomyxa* und bei *Amoeba binucleata*), wo die symbiotischen Bakterien an der Oberfläche der Glanzkörper agglutiniert sind, muss man als einen nicht spezifischen Vorgang bezeichnen. Ein, die Oberfläche der Glanzkörper beeinflussendes spezifisches Agglutinin und Lysin erzeugen einen spezifischen Kolloidstoff, und ein auf die Oberfläche des Körpers von symbiotischen Bakterien wirkendes spezifisches Bakterioagglutinin und Bakteriolysin erzeugen wieder einen anderen Kolloidstoff; beide eben erwähnte Stoffe sind in physikalischer Hinsicht verwandt und bewirken, dass die Bakterien mit der Oberfläche der Glanzkörper agglutinieren können.

Der bei *Pelomyxa* sich normal ergebende Fall, dass nämlich die symbiotischen Bakterien bloss an der Oberfläche der Kerne und nicht zugleich an der Oberfläche der Glanzkörper agglutiniert sind, lässt sich damit erklären, dass die Wirkung des Agglutinins und Lysins in der Regel nicht derart intensiv ist, um die Oberfläche der Glanzkörper genügend klebrig zu gestalten und hiedurch ihnen die Fähigkeit der Agglutination mit den symbiotischen Bakterien zu verleihen.

Der entgegengesetzte, bei der *Amoeba binucleata* vorkommende Fall, dass nämlich die symbiotischen Bakterien an den Glanzkörpern, jedoch nicht an den Kernen agglutiniert sind, ist wohl ein Beweis dafür, dass das Agglutinin und Lysin der Glanzkörper intensiver wirkt als das Agglutinin und Lysin der Kerne, so dass eine Agglutination der symbiotischen Bakterien nur an der Oberfläche der Glanzkörper, jedoch nicht an der Oberfläche der Kerne erzielt wird.

IV.

Auch der stets bei *Pelomyxa* vorkommende Fall, dass die symbiotischen Bakterien an der Oberfläche der Kerne agglutiniert sind, ist insoferne ein nicht spezifischer Fall, als infolge eines auf die Oberfläche der Kerne wirkenden spezifischen Karyoagglutinins und Karyolysins ein besonderer Kolloidstoff gebildet wird, und ein auf die Körperoberfläche der symbiotischen Bakterien wirkendes spezifisches Bakterioagglutinin und Bakteriolysin wieder einen anderen Kolloidstoff erzeugt, welche beiden Stoffe jedoch in physikalischer Hinsicht verwandt sind und die Agglutination der Bakterien mit der Oberfläche des Kernes verursachen.

Ausserdem findet jedoch an der Oberfläche der Kerne eine wirkliche spezifische Agglutination der symbiotischen Bakterien statt. Die Bakterien sind daselbst unter einander in länglicher Richtung agglutiniert und bilden auf diese Weise um den Kern eine aus einer Schichte von agglutinierten Bakterien bestehende Hülle. Der Umstand, dass die Bakterien mit einer Seite ihres Körpers an der Oberfläche der Kerne kleben, führt dazu, dass die Reibung, der die Bakterien im strömenden Protoplasma unterworfen sind, vermindert und auf diese Weise ihre gegenseitige, in länglicher Richtung erfolgende Agglutination ermöglicht wird. Diese Reibung im strömenden Protoplasma der *Pelomyxa* verhindert die Agglutination von im Protoplasma vorkommenden Bakterien. Obgleich das Bakterioagglutinin und Bakteriolysin fortwährend auf die Körperoberfläche der Bakterien wirken, findet eine Agglutination der Bakterien unter einander nicht statt. Die Wirkung spezifischer Stoffe ist in diesem Falle nicht von solcher Intensität, um die durch das strömende Protoplasma hervorgerufene Reibung zu überwinden.

Es kann jedoch Fälle geben, wo eine offenkundige Agglutination der im Protoplasma befindlichen symbiotischen Bakterien stattfindet. Einen solchen Fall habe ich beim Studium des obenerwähnten, aus dem

Moorwasser von Sct. Veit bei Wittingau stammenden Amoebenmaterials festgestellt. Ich habe daselbst eine spezifisch nicht näher bestimmte *Amoebe* gefunden. Dieselbe ist kleiner als *Amoeba proteus* und limaxförmig. Ihre Bewegungen vollziehen sich in der Weise, dass auf dem vorderen Körperteile, welcher breiter ist als das hintere Körperende, ein schmaler Streifen des hyalinen Protoplasmas sich vorwärts schiebt und ihm dann der ganze übrige, aus körnigem Protoplasma gebildete Körper folgt. In diesem körnigen Protoplasma finden wir zahlreiche Vacuolen, ausgiebigen Nahrungsstoff (Algen) und zahlreiche Kerne vor. An der Oberfläche sämtlicher Kerne sind massenhaft stäbchenförmige symbiotische Bakterien agglutiniert. Diese Bakterien kommen auch zahlreich im körnigen Protoplasma, und zwar vielfach agglutiniert vor. Dieselben bilden hier Gruppen, zusammengesetzt aus einer mehr oder weniger grossen Anzahl von untereinander in länglicher Körperrichtung agglutinierten Bakterien und bilden schliesslich auch grössere Massen, bestehend aus einer bedeutenderen Anzahl von untereinander unregelmässig agglutinierten Bakterien.

In diesem Falle ist die fortwährende Wirkung des Bakterioagglutinins und Bakteriolysins von einer solchen Intensität, dass sie auch die im strömenden Protoplasma entstehende, die Aglutination von Bakterien sonst erfolgreich verhindernde Reibung überwindet, wodurch eine augenfällige Agglutination der symbiotischen Bakterien im Protoplasma selbst, und nicht bloss an der Oberfläche der Kerne ermöglicht wird.

V.

Symbiotische Bakterien dürften wohl bei amoebenartigen Organismen eine nicht seltene Erscheinung sein.

Nach den bisherigen Erfahrungen kommen dieselben bei *Pelomyxa* und einer Reihe von Arten der Gattung *Amoeba* vor, von denen ich bisher in diesem Berichte 2 Arten, *Amoeba binucleata* und *Amoeba* sp., erwähnt habe.

In seiner verdienstvollen, bisher wenig gewürdigten, die Ergebnisse von Studien einiger amoebenartigen Organismen zusammenfassenden Arbeit,*) erwähnt Gruber auch symbiotische Bakterien (bei ihm „Pilzfäden" genannt), die er bei einigen dieser Organismen vorfand, und zwar erwähnt er insbesondere ausführlich stäbchenförmige Gebilde, mit denen die Kerne bei der *Amoeba quarta* um-

*) A. Gruber. Studien über Amoeben (Zeitschr. f. wissenschaft. Zoologie 41. B., 1885).

geben sind, und fadenförmige Gebilde, welche sich zahlreich im Protoplasma der *Amoeba binucleata* vorfinden. Das Vorkommen von Bakterien am Kerne bringt GRUBER mit seiner, allerdings irrigen Annahme in Zusammenhang, als ob der Kern denselben den nötigen Sauerstoff zuführen würde.

Während meiner früheren Studien über die Amoeben waren meine eingehenden Forschungen auch auf die Struktur des Protoplasmas bei *Amoeba proteus* gerichtet; und es gelang mir hiebei symbiotische Bakterien auch bei diesem typischen Repräsentanten amoebenartiger Organismen zu finden. Im Vergleiche mit den bei amoebenartigen, früher hier erwähnten Organismen vorkommenden symbiotischen Bakterien sind jene von unbedeutender Grösse, weisen eine kurze doppelstäbchenförmige Gestalt auf und finden sich zahlreich nebst anderen Partikeln im Protoplasma der *Amoeba proteus* vor. Ich fand dieselben bei allen Exemplaren, die ich aus dem reichhaltigen Material untersucht habe. Die untersuchten Exemplare wiesen keinerlei pathologische Symptome auf, die Äusserungen ihrer Plasmabewegungen und sonstigen Lebensfunktionen waren im Gegenteil durchaus normaler Natur. Es unterliegt daher keinem Zweifel, dass es sich hier um eine symbiotische Erscheinung handelt, nämlich um die Symbiose einer Bakterienart mit amoebenartigem Organismus.

VI.

Das Vorkommen symbiotischer Bakterien bei den niedrigsten animalischen Organismen, nämlich bei amoebenartigen Organismen, ist gewiss auch in phylogenetischer Beziehung ziemlich wichtig.

Das ursprüngliche Milieu, aus dem symbiotische Bakterien hervorgehen, ist gewiss ein Milieu, worin ihre amoebenartigen Ernährer leben, nämlich das Wassermilieu.

Den Prozess, durch welchen die Symbiosis hevorgerufen wurde und hervorgerufen wird, kann man sich folgendermassen vorstellen: die Exkretionsflüssigkeit wird aus dem Körper der Amoebe nicht nur durch die zusammenziehbare Vakuole, sondern auch an der ganzen Körperoberfläche ausgeschieden. Mit ihr werden normal als unverbraucht auch Stoffe ausgeschieden, die von spezifischer Wirkung sind. Diese Stoffe wirken auf Bakterien ein, welche im Wasser leben und zufälligerweise mit der Körperoberfläche der Amoebe in Berührung kommen. Die Bakterien haften auf diese Weise an der Körperoberfläche der Amoebe und gelangen durch das strömende Plasma in deren

Körper. Obgleich auch im Innern des Körpers die Bakterien von spezifischen Stoffen beeinflusst werden, finden sie daselbst nichts destoweniger hinreichende Nahrung, um nicht nur ihre Lebensfunktionen behaupten, sondern auch um sich vermehren zu können. Die Bakterien treffen im Amoebenkörper mit Stoffwechselabfällen zusammen, leben von ihnen und bauen aus denselben ihren Körper auf. Spezifische Stoffe, nämlich spezifische Bakterioagglutinine und spezifische Bakteriolysine, wirken nun auf die Oberfläche des Bakterienkörpers in der Weise ein, dass die Körperoberfläche aufgelöst wird, und dadurch ein der Amoebe als Nahrung dienendes Material gebildet wird. Eine allzu grosse Vermehrung der Bakterien wird dadurch hintangehalten, dass auch eine vollständige Bakteriolysis stattfinden kann, welcher jene Exemplare unterworfen sein können, die an der Kernoberfläche der Amoebe agglutiniert waren, eventuell auch minder widerstandsfähige, im Protoplasma vorkommende Exemplare, bei denen die destruktive Tätigkeit des Bakterioagglutinins und Bakteriolysins nicht durch asugiebige, aus der aufgenommenen Nahrung gewonnene Körperzunahme aufgewogen wurde.

Die Fähigkeit höherer animalischer Organismen spezifische immunisierende Schutzstoffe (Agglutinine, Lysine u. a.) zu erzeugen und mit ihrer Hilfe krankheitserrenden Bakterien Widerstand zu leisten, findet ihre phylogenetische Erklärung in der Fähigkeit der niedrigsten Lebewesen, nämlich amoebenartiger Organismen, spezifische Stoffe (intracellulare Agglutinine und Lysine) zu bilden, vermöge welcher diese Organismen auf die mit ihnen im symbiotischen Verhältnis lebenden Bakterien einwirken.

X.

Drobná sdělení o některých sloučeninách tetramethylamonia.

Se 2 obrazci v textu.

Napsal
docent dr. **Jaroslav Milbauer.**

Předloženo v sezení dne 27. května 1910.

V literatuře odborné není dosud popsána řada sloučenin tetramethylamonia. Příležitostně, maje dostatek materialu ve formě sulfátu, chloridu a hydroxydu tetramethylamonia, připravil jsem některé dosud neznámé sloučeniny jeho, zanalysoval i určil jejich vlastnosti. Podávám zde o nich stručnou zprávu podotýkaje, že jednu sloučeninu, totiž platinokyanid tetramethylamonia, popsal jsem již dříve v jiné menší práci. (Zeit. für anorg. Chemie 1907 str. 135.)

Perchlorat tetramethylamonia.

Látka tato dá se připraviti buď

a) nasycením perchlorové kyseliny (h = 1·125 fy Merck, Darmstadt) vodným roztokem hydroxydu tetramethylamonia. Neutralisujeme na lakmus, načež přičiníme několik kapek perchlorové kyseliny, by roztok jevil reakci kyselou a zahustíme ku krystalisaci. Eventuelně můžeme srazit alkoholem, drobné krystaly odssát a promýt ledovou vodou i překrystalovat z horké vody. Látku usušíme buď nad koncentrovanou kyselinou sírovou v exsikatoru nebo při 110° C ve vzdušné sušárně,

aneb

b) z roztoku solí tetramethylamonia ku př. laciného síranu sráží perchlorová kyselina v hojném nadbytku přidaná, zvláště je-li příto-

men alkohol, jemně krystalovaný perchlorat tetramethylia, který po promytí líhem a překrystalování jest látkou čistou.

Při analyse nalezeno:

			Theorie pro $N(CH_3)_4ClO_4$
$N(CH_3)_4^{\cdot}$	45·22%	46·02%	45·56%
ClO_4'	54·66%	54·34%	54·44%
	99·88%	100·36%	100·00%

Postupováno takto:

Skupina $N(CH_3)_4^{\cdot}$ stanovena tím, že látka převedena methodou Kjeldahlovou na síran ammonatý a destilací určen ammoniak. K tomu dlužno podotknouti, že navážená látka byla předem rozpuštěna v nejmenším množství vody, přičiněna část konc. kyseliny sírové, kapka čisté rtuti, zahříváno zvolna a po vypuzení kyseliny perchlorové přidáno další obvyklé množství konc. kyseliny sírové i vařeno po osm hodin. Tuto dlouhou dobu je potřebno dodržeti, jelikož kjeldalisace sloučenin tetramethylia jde velmi zvolna vpřed, jak ukázal při jiné příležitosti Andrlík.*)

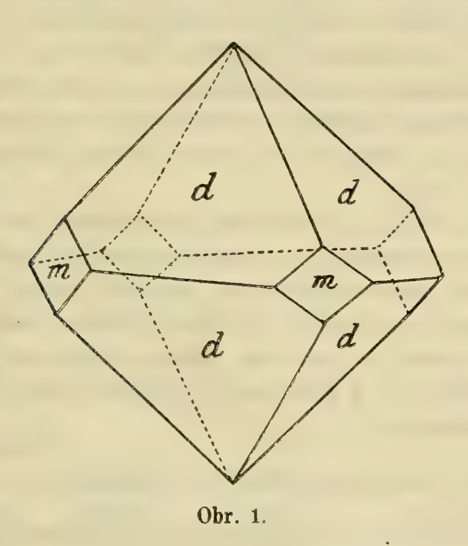
Aby mohla být určena skupina ClO_4', vzato útočiště k methodám, jichž užívá praxe technická při stanovení perchloratu v ledku. Osvědčilo se redukovat perchlorat tetramethylamonia za horka tavením se sodou a určiti vzniklý chlorid. Jelikož perchlorat tetramethylamonia zahřetím exploduje, muselo být šetřeno zvláštních opatrností. Preparát odvážen byl na dno platinového tyglíku, převrstven směsí čistých uhličitanů draselnatého a sodnatého, nakápnuto vody tak, aby směs byla jen zvlhčena a nyní velmi zvolna zahříváno i plamen sesilován, až směs klidně taje. Tyglík musí být uzavřen víčkem, jelikož nastane v určitém okamžiku poněkud intensivnější reakce. Ke konci žíhání buď celý tyglík i víčko v červeném žáru. Po vytavení vylouží se vodou, okyselí kyselinou dusičnou a vážkově stanoví Cl'.

Perchlorat tetramethylamonia $N(CH_3)_4\ ClO_4$ tvoří bílé krystalky, úplně neutrálné, na rozdíl od perchloratu draselnatého zcela bez chuti. Neobsahují okludována vodu, takže záhřevem netřeští, silněji zahřívány však s lehkou explosí shořují, zbarvujíce plamen violově. Ve 100 částech vody studené rozpouští se 1·126 částí $N(CH_3)_4\ ClO_4$. Vzhledem k této malé rozpustnosti zkoušeno, zda nedalo by se této okolnosti využitkovati ku stanovení vážkovému tetramethylamonia v podobě perchloratu i v jeho sloučeninách. Ukázalo se, že na překážku jest značnější rozpustnost perchloratu tetramethylamonia v líhu. 100

*) Andrlík Listy Cukrovarnické XX. str. 265.

částí studeného lihu rozpouští 0·04 částí $N(CH_3)_4 ClO_4$.*) V etheru jest nerozpustný. Louhy alkalickými se nerozkládá. Obyčejná redukční činidla ho neredukují ve vodných roztocích. Zahříváním několika hodinovým s koncentrovanou kyselinou sírovou oxyduje se na síran amonatý.

Prof. Dr. Fr. Slavík určil na preparátu, který pro něho připravil Vl. Staněk, že jest soustavy tetragonální. Poměr os byl a : c = 1·0247. Pozorovány formy: m{110}, d{101}. Z vodných roztoků tvoří se buď prismatické krystalky s převládajícím *m* aneb tvary bipyramidálního habitu (srovnej obrazec)



Obr. 1.

	Vypočteno	Pozorováno
d : m = (101) : (110)	—	* 59° 36′
d : d = (101) : (011)	60° 48′	60° 41′
d : d = (101) : (̄101)	91° 24′	—

Štěpnost jest dle m{110} dokonalá, dle c{001} dosti dokonalá.

Permanganat tetramethylamonia.

Sloučenina tato připravena vzájemným působením roztoků permanganatu barnatého a síranu tetramethylamonia dle rovnice:

$$Ba[MnO_4] + [N(CH_3)_4]_2 SO_4 = 2[N(CH_3)_4] MnO_4 + BaSO_4$$

*) 100 částí vody studené rozpouští 1·667 částí $KClO_4$. Alkohol prakticky perchlorat draselnatý nerozpouští. Schlösing: Comp. rend. 73. 1269.

a sice tak, aby žádného z nich nebyl nadbytek a filtrát ani jedním ani druhým netvořil větší ssedlinu.

Vyloučený síran barnatý odfiltrován a fialový roztok na vodní lázni zahuštěn. Po ochlazení vypadly jemné jehličky, event. ze zředěnějších roztoků pěkné sloupce, které rychle vyjmuty i vysušeny na poresním talíři.

Analysovány tímto způsobem:

Skupinu MnO_4' nebylo možno pouhým žíháním převésti na Mn_3O_4, jelikož při zahřívání nastane rozklad látky okamžitý, provázený silnou detonací. Velice snadno však možno tuto jednoduchou cestu nastoupitii, applikujeme-li způsob, který svého času popsal Preis,*) analysuje podvojné kyanidy zahříváním s kyselinou šťavelovou. V našem případě odvážen permanganat tetramethylamonia do platinového tyglíku, přidáno čisté kyseliny šťavelové, zvlhčeno vodou, načež zahříváno zvolna na vodní lázni i vysušeno. Na konec prudce žíháme do konstantní váhy i vážíme Mn_3O_4.

Skupina $[N(CH_3)_4]^{\cdot}$ převáděna kjeldahlisací na síran ammonatý. Odvážená látka rozpuštěna v nejmenším množství vody, pak přidáno několik krystalů kyseliny šťavelové, několik kapek kyseliny sírové, a když tekutina se odbarvila, přidáno potřebné množství koncentrované kyseliny sírové a spalováno varem po dobu as 8 hodin.

Také titrací $^1/_{10}$ $\bar{n}$ šťavelovou kyselinou určena skupina MnO_4'.

Takto nalezeno:

			Theorie vyžaduje:
MnO_4'	62·02%	61·30°/00	61·66%
$[N(CH_3)_4]^{\cdot}$ . . .	37·96%	38·29%	38·34%
	99·98%	99·59%	100·00%

Permanganat tetramethylamonia $N(CH_3)_4\ MnO_4$ tvoří krystaly barvy temně purpurové, neprůhledné, chuti podobné jako permanganat draselnatý. Na čistém suchém vzduchu je stálý. Vlhký rychle se rozkládá. Při odkuřování jeho roztoků dbáti jest toho, by se do nich neprášilo, odkuřovati radno na vodní lázni. Suchá látka záhřevem velmi prudce exploduje. V zplodinách nachází se zápachem snadno poznatelný trimethylamin. V ostatních vlastnostech podobá se analogické soli draselnaté.

Při jeho měření krystalografickém shledal prof. Dr. Fr. Slavík, že jest tetragonální (c = 0·7125) isomorfní s perchloratem (c = 0·7245) hustoty 1·541.

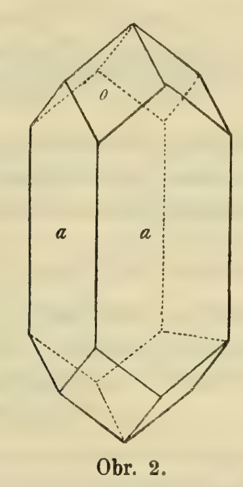
*) Preis Věstník král. české spol. nauk 1870 str. 79.

Pozorovány tvary: *o* (111) P . *a* (100) ∞ P $\overset{\circ}{\infty}$. *m* (110) ∞ P.

	Měřeno	Vypočteno
$111 : 1\bar{1}1 =$	60° 15′	—
$: \bar{1}\bar{1}1 =$	90° 8′	90° 26′
$100 : 010 =$	90° 11′	90° 0′

Štěpnost dle (100) dokonalejší než dle (001).

Krystaly svou neprůhledností jsou nezpůsobilé ke zkoumání optickému.



Obr. 2.

Dithionan tetramethylamonia.

Analogickou cestou, jakou bral jsem se při synthese látky předešlé, byl připraven i dithionan tetramethylamonia. Koncentrované roztoky dithionanu barnatého a síranu tetramethylamonia míseny tak, že vznikl po sfiltrování síranu barnatého roztok, který neskytal hojnější ssedliny ani jedním ani druhým roztokem:

$$BaS_2O_6 + [N(CH_3)_4]_2SO_4 = BaSO_4 + [N(CH_3)_4]_2S_2O_6.$$

Roztok volnou krystalisací poskytuje velmi pěkné bezbarvé, lesklé, průhledné krystaly.

Analysovány takto:

Skupina S_2O_6'' převáděna na SO_4''. Odvážená látka rozpuštěna v nejmenším množství vody, pak přidán velký přebytek konc. kyseliny dusičné, ponecháno v klidu delší čas, odkouřeno pak na malý volum na vodní lázni, znovu přidáno konc. kyseliny dusičné a proces

oxydační několikráte opakován. Ke konci zředěno vodou, sražen $BaSO_4$.

Skupina $[N(CH_3)_4]^·$ jednak určena po kjeldahlisaci destilací vzniklého síranu ammonatého, jednak sražena jako chloroplatičitan tetramethylia a vážena platina. Analytická cesta tato jest táž, jaké se užívá při stanovení kalia a proto není třeba ji zde popisovati.

Nalezeno

			Theorie pro $N(CH_3)_4SO_3$:
$2[N(CH_3)_4]$	47·80%	47·90%	48·06%
$2[SO_3]$	51·93%	52·10%	51·94%
	99·73%	100·09%	100·00%

Dithionan tetramethylamonia $[N(CH_3)_4]_2S_2O_6$ tvoří krystaly na vzduchu velmi snadno vlhnoucí, chuti čistě hořké. V baničce zahřívány třeští, pak tají i rozkládají se za vzniku síranu:

$$[N(CH_3)_4]_2S_2O_6 = [N(CH_3)_4]_2SO_4 + SO_2.$$

Ve vodě velmi snadno se rozpouští a roztoky i za horka jsou stálé. Prudká oxydační činidla převádějí ho zvolna na síran. Kyselina sírová dlouhým varem převádí ho na síran amonatý.

Dle údajů prof. Dr. F. Slavíka, jehož laskavostí i tento preparát byl proměřen, krystaluje v soustavě krychlové ve spojkách osmistěnu s krychlí obyčejně sploštělých dle jedné plochy *o*, tak že nabývají podoby klencové base s rhomboedrem.

	Měřeno	Vypočteno
0 : 0	70° 50′	70° 31¾′
: 0	54° 29′	54° 54′

Jest isotropní.

Sulfokyanid tetramethylamonia.

Ku přípravě této látky vyroben předem sulfokyanid barnatý a roztok jeho sražen jako v případě předešlém síranem tetramethylamonia:

$$[N(CH_3)_4]_2SO_4 + Ba(SCN)_2 = 2(NCH_3)_4SCN + BaSO_4.$$

Získaná tekutina po filtraci odkouřena a surový produkt vyjmut horkým ethylalkoholem, sfiltrován a ponechán v klidu. Vzniklé jemné jehličky novým překrystalováním z absolutního alkoholu přečistěny.

Při analyse této nové látky postupováno způsobem následujícím:

Skupina *SCN'* sražena z vodného roztoku dusičnanem stříbrnatým, pak okyseleno několika kapkami kyseliny dusičné, filtrováno Goochovým tyglíkem, vzniklý sulfokyanid stříbrnatý promyt vodou, alkoholem, vysušen při 120° C a vážen. Po druhé látka odkouřena několikráte s kyselinou dusičnou a vzniklý SO_4'' vážen co $BaSO_4$.

Skupina $[N(CH_3)_4]^{\cdot}$ stanovena ve formě chloroplatičitanu tetramethylamonia.

	Nalezeno	Vypočteno:	
$N(CH_3)_4$	56·56%	55·50%	56·06%
SCN	43·52%	43·65%	43·94%
	100·08%	99·15%	100·00%

Sulfokyanid tetramethylamonia $N(CH_3)_4\,SCN$ tvoří bílé, jemné splstěné jehličky ve vodě přesnadno rozpustné, v líhu dobře rozpustné. Na rozdíl od sulfokyanidu draselnatého záhřevem sic taje, avšak tavenina nehnědne, nemodrá. Při vyšší teplotě se rozkládá. Jest látkou bez zápachu i chuti, na jazyku pouze chladí. Oxydační činidla zvolna ho oxydují, kysličník vodičitý, zředěná kyselina dusičná, chlorová voda, brom v roztoku jeho skytají hnědé zbarvení i ssedlinu, která záhřevem úplně zmizí, analogicky jako u sulfokyanidů alkalických. Tavením s alkaliemi uvolňuje trimethylamin.

Boran tetramethylamonia.

V hydroxydu tetramethylamonia rozpuštěna za horka kyselina borová, po vychladnutí sfiltrován vyloučený nadbytek její, filtrát ponechán volné krystalisaci. Získané krystaly přečištěny novou krystalisací z horké vody.

Při analyse stanovena skupina $N(CH_3)_4$ způsoby jako při předchozích sloučeninách. B_4O_7'' nejjednodušeji určen po vyžíhání odváženého množství látky s čistým předem žíhaným i váženým kysličníkem vápenatým. Přibytek na váze odpovídá kysličníku borovému resp. B_4O_7''. Voda určena z difference, jelikož při sušení látka zvolna se rozkládá.

	Nalezeno		Theorie pro $[(NCH_3)_4]_2B_4O_7 \,.\, 5H_2O$
$2[N(CH_3)_4]^{\cdot}$	37·32%	37·51%	37·60%
B_4O_7''	39·41%	39·06%	39·55%
5 H_2O (z difference)	23·27%	23·43%	22·85%
	100·00%	100·00%	100·00%

Analysy nejlíp odpovídají krystalovanému vodnatému *tetraboranu tetramethylamonia* $[N(CH_3)_4]_2B_4O_7 . 5H_2O$. Jest ve vodě snadno rozpustný, tvoří krystaly čiré, bezbarvé, dle údajů prof. Dra F. Slavíka soustavy pravděpodobně trojklonné — sloupce, zřetelně opticky dvojosé o dvojlomu velmi vysokém. V plameni shořuje i zbarvuje ho světle zeleně.

Kamenec tetramethylamonia a hliníku zdá se, že neexistuje. Po opětovaných pokusech při různých teplotách vypadl ze směse konc. roztoků síranu hlinitého a síranu tetramethylamonia pouze kryst. síran hlinitý.

Také jiné sloučeniny jako sirník připravil jsem účinkem sirníku barnatého na síran tetramethylamonia též fluorid působením fluoridu stříbrnatého na chlorid tetramethylamonia, ale prozatím získané preparáty nevykazovaly konstantní složení, nebyly chemickými individuy.

V Praze, v květnu 1910.

Z laboratoře chemické
na c. k. české vysoké škole technické v Praze.

XI.

Zur Reduktion klimatologischer Elemente.

I. Mitteilung.

Von **V. Láska.**

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 27. Mai 1910.)

Der Gegenstand dieser Mitteilung ist ein Versuch, die verschiedenen bei der Reduktion der klimatologischen Elemente angewandten Methoden kritisch zu sichten, sie zu begründen und zu erweitern. Bisher wurden sie einfach als Erfahrungstatsachen hingestellt, so dass bei ihrer Anwendung immer ein Giltigkeitsbeweis a posteriori verlangt werden musste. Nachdem bei jedem Problem eine Vertiefung vorzugsweise durch Kritik bisher gebrauchter Begriffe und dann durch Einführung neuer, beziehungsweise noch wenig angewandten Methoden, erreicht werden kann, war ich bemüht nach beiden Richtungen hin aufklärend und anregend zu wirken.

Das Problem der klimatologischen Reduktion gehört dem Grenzgebiete der angewandten Mathematik und der Meteorologie an. Es ist demnach, wie überhaupt alle Naturprobleme, rein algebraisch nicht lösbar. Auf anderer Seite darf aber die Mathematik in der Klimatologie nicht so vernachlässigt werden, wie es leider zu oft geschieht.

Die mathematische Ausrüstung der Klimatologen war bisher eine sehr bescheidene. Das arithmetische Mittel, die Fechnersche Formel zur Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers und als Höchstes, die Besselsche Interpolationsformel für periodische Erscheinungen, waren die gangbarsten Mittel, welche zur Anwendung kamen. Die Probleme der Mengenlehre wurden nicht als solche, sondern rein

statistisch behandelt und das noch sehr oft in einer unrichtigen Weise. So erscheint das klimatologische Material als eine grosse Sammlung von Zahlen von oft sehr zweifelhaften Werte.

Die wichtigste und erste Tätigkeit bei der Inangriffnahme eines klimatologischen Problems muss daher in der Prüfung des vorhandenen Materials bestehen. Wie hiebei zu verfahren ist, ist in Meyer's bekannter Anleitung*) auseinandergesetzt. Da unsere Arbeit als eine Fortsetzung dieser Schrift gedacht ist, so wird zum vollen Verständniss des Dargebotenen angezeigt sein, sie neben jener zu lesen. In der gegenwärtigen Mitteilung, befassen wir uns vorzugsweise mit der Diskussion der Niederschläge, weil sie zurzeit ein aktuelles Thema bildet.

Der Gang unserer Darstellung — kurz skiziert — ist etwa der Nachstehende: Zunächst werden die gebräuchlichen Reduktionsformeln theoretisch abgeleitet und gezeigt, dass sie im Allgemeinen nicht konvergent sind. Sie sind daher nur zur Prüfung der Homogenität der Beobachtungsreihen verwendbar und auch das, nicht in der allgemeinenen Form, sondern als Einzelngleichungen. Mit anderen Worten, man muss sie auf einzelne Beobachtungsergebnisse anwenden, nicht auf die Mittelwerte. Nachher wird auf die Prüfung der Beobachtungsreihen eingegangen; der von Hellmann eingeführte Schwankungsquotient wird durch die Abweichungsdifferenz ergänzt. Wie ein roter Faden zieht sich durch das Ganze, eine nomographische Methode der Interpolation von Beobachtungswerten. Sie schliesst sich der logarithmischen Natur der Niederschläge eng an, und hat den Zweck, die bisherigen Reduktionsweisen durch genauere zu ersetzen. Diese Methode, welche man kurz als klimatologische Profilierung bezeichnen kann, wird an einigen Beispielen, zumeist der bekannten Klimatologie von Hann entnommen, zur Darstellung gebracht. Der hiebei zu beachtende Hauptzweck ist, die Darstellung der Abhängigkeit des Klima von der geographischen Lage.

Auf wichtige Anwendungen solcher Beriehungen auf die Klimate der Vorzeit möge hier noch aufmerksam gemacht werden. Nach E. Geinitz sind Wesen und Ursache der Eiszeit folgendermassen kurz gekennzeichnet:

Die Ursache der Eiszeit war keine kosmische, sondern eine klimatologische nämlich: Vermehrte Niederschläge, bedingt durch die eigenartige Konfiguration

*) H. Meyer, Anleitung zur Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen für die Klimatologie. Berlin 1891.

der Kontinente am Schlusse der Tertiärzeit*). Wir kennen diese Konfigurationen, wenigstens in grossen Zügen**). Die klimatologische Profilierung gibt uns ein Mittel zu entscheiden, ob die oben vorgebrachte Theorie der Eiszeiten zulässig ist oder nicht. Aber auch einen praktischen Nutzen hat das hier angeregte Verfahren. Es zeigt, dass nicht planlose Vermehrung der ombrometrischen Stationen, sondern zielbewusste Beobachtung an ausgewählten Stellen, angezeigt erscheint, um die für kulturtechnische Zwecke erforderliche Daten zu liefern. Es ist klar, dass Beobachtungsstationen an jenen Stellen zu errichten sind, welche am meisten zur Bestimmung der Profilkurven beitragen.

I.

Zu klimatologischen Untersuchungen eignen sich nur lückenlose, fehlerfreie und mit einander vergleichbare Reihen der Elemente, von bestimmter durch die Natur des Elementes bedingter Länge. Diesen Anforderungen entsprechen nur sehr wenige der Vorhandenen. Man muss daher nach Mitteln sinnen, welche gestatten die Lücken auszufüllen, die Fehler zu entdecken, und die Reihen auf gleiche Perioden zu bringen. Damit ist die Aufgabe des Reduktionsproblems vorgezeichnet.

Es dürfte zweckmässig sein, zunächst die vorhandenen Reduktionsweisen einer Kritik zu unterziehen. Nehmen wir an, dass einem Erdorte, ein absolutes meteorologisches Element e_∞ entspricht, welches durch die Gleichung

$$\lim\,(e_\infty - e_n) = 0 \quad \text{für} \lim n = \infty$$

definiert erscheint, wobei e_n das aus n Jahren gebildete Mittel darstellt.

Sei ferner e das $n+1$te Jahresmittel und

$$v_n = e - e_n$$

so wird

$$e_{n+1} - e_n = \frac{v_{n+1}}{n} \tag{1}$$

Die Reduktion der klimatologischen Elemente auf gleiche Jahresperioden wird möglich, sobald es gelingt für

*) Man vergl. im allgemeinen W. Eckhardt, Das Klimaproblem der geologischen Vergangenheit etc. . . Braunschweig 1909.

**) Siehe z B. T. Arldt, Die Entwickelung der Kontinente etc. Leipzig 1907.

$$e_\infty - e_n$$

konvergente Entwickelungen zu finden. Zu diesem Zwecke teilen wir das Indexgebiet in zwei Teile (1 bis n) und (n bis ∞) und untersuchen vorerst das Letztere.

Für zwei Beobachtungsorte gilt die strenge Beziehung:

$$e'_n - e_n = e'_\infty - e_\infty + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{v'_\varkappa - v_\varkappa}{\varkappa} \qquad 2)$$

Sie wird konvergend, wenn

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{v'_\varkappa - v_\varkappa}{\varkappa}$$

einem endlichen Grenzwert zu strebt.

Ob dieses stattfindet, bedarf in jedem speziellen Falle einer besonderen Untersuchung.

Im allgemeinen wird es sicher nicht der Fall sein. Daraus folgt, dass die Gleichung 2) mit grosser Vorsicht anzuwenden ist. Die aus ihr abgeleiteten Reduktionsformeln, welche wir nachstehend entwickeln, gehören also nicht zu jenen, welche ohne weiteres und allgemein anwendbar wären.

Nehmen wir lauter positive $v'_\varkappa - v_\varkappa$ an, und sei δ ihr Mittelwert, dann wird wegen

$$\lim \ \delta \sum \frac{1}{\varkappa} = \infty$$

die Gleichung 2) unbrauchbar. Sind die Glieder abwechselnd positiv und negativ, dann hängt der Wert der Reihe

$$\delta \sum \frac{1}{\varkappa}$$

von der Reihenfolge der Vorzeichen ab, ja man kann, wie Riemann gezeigt hat, durch entsprechende Anordnung der Vorzeichen ihr einen beliebigen Wert erteilen.

Nehmen wir, statt einer unendlich grossen, eine sehr grosse zunehmende Zahl s an, und setzen a priori fest, dass

$$\lim \sum \frac{v_\varkappa v_\lambda}{\varkappa\lambda} = 0 \qquad \text{für } \lim \varkappa = \lambda = \infty$$

sein soll, dann wird

$$e_n - e_s = v_{ns}\,\varphi\,(n, s),$$

wobei

$$\varphi(n, s) = \sqrt{\sum_1^s \frac{1}{(n+\varkappa)^2}}$$

und v_{ns} durch die Gleichung

$$v_{ns}\,\varphi(n, s) = \sqrt{\sum_1^s \left(\frac{v_\varkappa}{n+\varkappa}\right)^2}$$

definierte Mittelwert von v ist.

Die Funktion $\varphi(n, s)$ kann leicht bestimmt werden.

Bezeichnet $B_\varkappa$ die $\varkappa$ te Bernoullische Zahl, dann ist

$$\sum \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{(2-1)B_1}{2(x+\frac{1}{2})^3} - ,$$

so dass man in erster Näherung schreiben kann:

$$e'_n - e_n = e'_\infty - e_\infty \pm \frac{v'_{n\infty} - v_{n\infty}}{\sqrt{n}} \qquad 3)$$

oder auch

$$\frac{e'_n - e'_\infty}{v'_{n\infty}} = \frac{e_n - e_\infty}{v_{n\infty}} \qquad 4)$$

$$\frac{e'_n}{e_n} = \frac{e'_\infty}{e_\infty}\left\{1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{v'_{n\infty}}{e'_\infty} - \frac{v_{n\infty}}{e_\infty}\right) + \right. \qquad 5)^{*)}$$

Die Gleichungen 3) 4) 5) stellen die von Hann, Hellmann und Wild gebrauchten Reduktionsformeln dar.

Die Formel 5), welche erfahrungsgemäss zur Reduktion der Niederschläge verwendet wird, ist ihrem Charakter nach eine logarithmische. Es liegt daher der Schluss nahe, bei den Niederschlägen analog wie in der Photometrie, statt des arithmetischen Mittels, das geometrische, beziehungsweise das arithmetische Mittel der Logarithmen, zu verwenden. Jedenfalls würde dadurch der Einfluss abnormer Niederschlagsmengen auf das Gesamtresultat, herabgemindert werden.

Die Gleichung

$$\lim \sum \frac{v_\varkappa\, v_\lambda}{\varkappa\lambda} = 0$$

gibt eine symmetrische Häufigkeitskurve der Elemente $v_\varkappa$ und v_λ; in diesem Falle sind also die Gleichungen 3) 4) 5) sicher konvergent.

*) Wie sich andere Relationen ableiten lassen, liegt an der Hand. Ein Bedrürfniss nach ihrer Entwickelung liegt aber gegenwärtig nicht vor.

Wir haben in ihr eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit obiger Formeln. Ob die Bedingung auch eine Notwendige ist, bleibt bei dieser Untersuchung unentschieden. Da die Gaussche Häufigkeitskurve ebenfalls eine Symmetrische ist, so hat man für das Wertgebiet (1 bis n) näherungsweise

$$e_{\infty} = e_n \pm \frac{m}{\sqrt{n}},$$

wobei

$$m = \sqrt{\frac{[\triangle^2]}{n-1}}$$

ist, und $\triangle$ den Unterschied zwischen dem arithmetischen Mittel aus n Beobachtungen und jedem Einzelnwert darstellt.

Es lässt sich zeigen, dass mit wachsendem n die Grössen $\triangle$ und v asymptotisch sich nähern. Beide Wertgebiete gehen dann in einander über.

Wir erhalten also als Schlussresultat den Satz, dass die Formeln 3), 4), 5) nur dann anwendbar sind, wenn symmetrische Häufigkeitskurven vorliegen.

Liegt eine asymmetrische Häufigkeitskurve vor, dann liefern diese Formeln unter Umständen eine nicht existierende langsamme Elementenänderung, welche einen saekulären Charakter annimmt und leicht zu falschen Hypothesen Anlass geben kann. Freilich wird diese Erscheinung erst bei langen Beobachtungsreihen sich bemerkbar machen, aber es ist wichtig zu vissen, dass sie existiert und worin sie ihren Grund hat.

Dieses beweist aufs neue die Tatsache, dass bei allen statistischen Untersuchungen eine Untersuchung der Reste notwendig ist, insbesondere dann, wenn Formeln oder Relationen zur Anwendung kommen. Wir können nämlich dann und nur dann eine Formel oder Beziehung als berechtigt ansehen, wenn sie Werte liefert, welche sich von den Beobachteten um Grössen unterscheiden, die innerhalb der durch die Beobachtungsfehler gegebenen Grenzen liegen und deren Häufigkeitskurve jener der zufälligen Fehler entspricht.

Reichen die Reihen zur Konstruktion der Häufigkeitskurve nicht

aus, dann sollte man wenigstens die Vorzeichenprüfung nicht unterlassen.*)

Wenn daher H. Meyer in seiner „Anleitung“ die Fehlerrechnung — freilich nur einstweilen — aus der Meteorologie entfernt wissen möchte, so wird man ihm nicht ganz zustimmen können. Die Klimatologie insbesondere, bedarf, sobald sie anfängt nach Formeln zu rechnen und Gesetze aufzustellen, wie jede andere Wissenschaft der Fehler- oder besser gesagt der Abweichungsrechnung. Schon die grundlegende Frage, ob das arithmetische Mittel, der richtige Mittelwert ist, durch welchen der die Klimatologie definierende mittlere Zustand der Atmosphäre bestimmt wird, kann folgerichtig nur durch eine Untersuchung beantwortet werden, bei welcher Sätze der Fehlerrechnung angewendet werden sollen und müssen. Es wurde schon oben angedeutet, dass auch andere Mittelwerte zur Geltung kommen können. Auch hier ist das Studium der Häufigkeitskurve möglich und erforderlich, weil wir den „richtigen“ Mittelwert als jenen definieren müssen, desen Reste eben eine den Zufallsfehlern entsprechende Häufigkeitskurve liefern.

Bei allen Beobachtungswerten, welche eine einzige Grösse durch Winkel und Längen, sowie überhaupt durch geometrische Grössen bestimmen, ist, wie empirisch nachgewiesen wurde, das arithmetische Mittel auch der richtige Mittelwert in oben definiertem Sinne.

Es hat ferner zwei wichtige Eigenschaften und zwar, es ist einfach zu berechnen und es liefert ein allgemein verwendbares Vergleichsmass, für das wirklich vorhandene Quantum. Bedenkt man überdiess, dass Abweichungen des arithmetischen Mittels von anderen Mittelwerten, bei kleineren Variationen auch klein bleiben, so wird man wenigstens sofern es sich um kürzere Reihen, mit wenig varirenden Elementen handelt, auch das arithmetische Mittel als einen allgemeinen das Klima definierenden Faktor beibehalten hönnen.

Die Anwendung des arithmetischen Mittels und überhaupt der Theoreme der Gauss'schen Fehlertheorie ist aber an eine Bedingung gebunden, welche in der Meteorologie zu wenig beachtet wird. Es wird nämlich vorausgesetzt, dass die Variationen des Elementes unabhängig sind, von der Grösse desselben. Dieses trifft sehr nahe bei der Temperatur zu, nicht aber beim Niederschlag, wo die Variationen sehr oft mit der Grösse des Niederschlages wachsen.

---

*) Siehe beispielsweise: Helmert, Berl. Sitzungsberichte 1905 Nr. 28 oder dessen Ausgleichsrechnung II. Aufl. S. 334.

Darum passt auf Niederschläge, sofern diese mit linearen Skalen gemessen werden die Formel 5). Wollte man die Formel 3) anwenden, dann müsste das lineare Maas durch ein anderes vom logarithmischen Charakter ersetzt werden. Auch ist es verfehlt die Formeln der Fehlertheorie auf die Niederschlagsmessungen anzuwenden. Eine Autorität auf diesem Gebiete Hellmann*) äussert sich wie folgt darüber:

„Die Autoren Hann, Kremser und Wild, die vor mir der mittleren Veränderlichkeit des Regenfalles Aufmerksamkeit geschenkt haben, benutzten sie auch zur Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers der mittleren monatlichen und jährlichen Niederschlagshöhen nach der einfachen Fechner'schen Formel

$$w = 1{\cdot}1955 \frac{v}{\sqrt{2n-1}},$$

wo v die mittlere Veränderlichkeit oder Abweichung, n die Anzahl der Jahrgänge bedeutet, und sie ermittelten sodann noch die Zahl Jahre, die nötig wäre, um diesen Mittelwerten eine bestimmte Genauigkeit zu geben. Wie im Regenwerk B. I. S. 246**) unterlasse ich auch hier diese Rechnungen, weil sie nach meinen a. a. O. S. 38 gegebenen Auseinandersetzungen und auch nach dem oben S. 33***) Gesagten, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Fehlerberechnung der Niederschlagsmittel nicht anwenden lässt."

Definiert man die Klimatologie als die Wissenschaft von den mittleren Zuständen der Atmosphäre und ihren Veränderungen im Laufe der Zeit, sowie von den Folgen dieser mittleren Zustände und ihrer Veränderungen, dann, muss offenbar erst eine spezielle Untersuchung zeigen, ob in allen Fällen das arithmetische Mittel zur Darstellung dieser mittleren Zustände und ihrer Folgen auch ausreichend ist.

II.

Soll eine Beobachtungsreihe zur Reduktion verwendbar sein, so muss sie auf ihre Homogenität geprüft werden. Man kann dabei in verschiedener Weise vorgehen. Die Grundlage bildet in der Regel irgend ein Erfahrungssatz. So sind beispielsweise die Diffe-

*) Untersuchungen über die Schwankungen der Niederschläge, Veröff. des K. P. Met. Instituts. Nr. 207 (1909).

**) Hellmann, Die Niederschläge in den norddeutschen Stromgebieten.

***) d. h. in den früher citierten: Untersuchungen etc.

renzen der Temperaturmittel von entsprechend nahen Beobachtungsorten nahezu konstant. Beim Niederschlag sind es die Quotienten Deshalb wurde von Hellmann*) der Schwankungsquotient benützt nämlich das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Jahresmenge des Niederschlags, welches für weite Gebiete nahezu konstant ist, und beispielsweise in Norddeutschland wenig um den Wert 2·2 schwankt.

Wir haben hier also einen Erfahrungssatz, welcher aber nicht ohne weiteres verallgemeinert werden darf. Es zeigt sich nämlich dass diesem Wert nicht nur eine klimatologische, sondern auch eine geographische Bedeutung zukommt. Soll also der Satz von der Gleichheit des Schwankungsquotienten benützt werden, so muss der Beweis erbracht werden, dass er für ein bestimmtes Vergleichspaar wirklich gilt. Sehen wir einmal zu, wie wir zu dieser Gleichheit gelangen können.

Nehmen wir an, dass die Schwankungen den Niederschlagsmengen proportional sind. Sei m der mittlere Wert und a resp. a' seine Abweichung vom Max. resp. Min., sowie λ ein Proportionalitäsfaktor, so wird offenbar

$$\frac{m + a}{m - a'} = \frac{\lambda m + \lambda a}{\lambda m - \lambda a'} \qquad 6)$$

Sind also m und m' die Niederschlagsmittel zweier Stationen mit gleichem Schwankungsquotienten, so folgt, dass auch genähert die Beziehung

$$\frac{m}{m'} = \frac{Max}{Max'} = \frac{Min}{Min'} = q \qquad 7)$$

bestehen muss. Wir haben also:

$$\frac{Max}{Min} = \frac{Max'}{Min'} \qquad 8)$$

Als einfaches Beispiel mögen aus Hellmann's Publikation die Stationen Kopenhagen und Genf angeführt werden. Der Schwankungsquotient für beide Stationen ist sehr nahe gleich. Man hat

$$\text{Mittelwerte}: \frac{850}{560} = 1{\cdot}5$$

$$\text{Maxima}: \frac{1191}{731} = 1{\cdot}6$$

*) Ueber die extremen Schwankungen des Regenfalles, Z. d. G. f. Erdkunde Berlin 1908.

$$\text{Minima}: \frac{537}{356} = 1\cdot5$$

Die Gleichung 8) kann zwar auch bestehen, ohne dass die Gleichung 7) erfüllt sein muss, dann aber wird die Reduktion einer Station auf die Andere zweifelhaft, denn eine solche ist nur bei gleichmässig laufenden Kurven möglich.

Bestehen die Gleichungen 7), dann wollen wir die Zahlenwerte reduziebel nennen.

Aus dem Gesagten ergibt sich eine einfache geometrische Konstruktion zur Ueberprüfung reduziebler Zahlenwerte.

Es seinen die Zahlenwerte für

$$\max_1, \max_2, \max_3, \ldots .$$
$$\min_1, \min_2, \min_3, \ldots .$$

gegeben, welche gleichen Schwankungsquotienten besitzen.

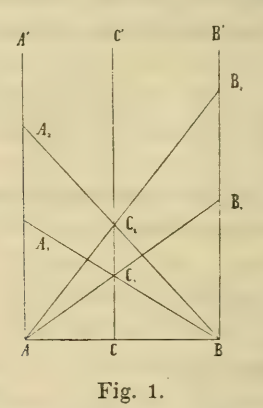


Fig. 1.

Man zeichne in beliebigem Abstande AB zwei Senkrechte $AA,$ und BB', mache

$$AA_1 = \min_1, \quad BB_1 = \max_1$$

und suche den Schnittpunkt C_1 von A_1B und AB_1. Von diesem fälle man die Senkrechte $CC_1 \perp AB$.

Sodann müssen die Schnittpunkte, welche den übrigen Wertepaaren also z. B.

$$AA_2 = \min_2, \quad BB_2 = \max_2 \text{ etc.}$$

entsprechen, auf dieser Geraden liegen.

Um dieses zu beweisen, hat man nur zu zeigen, dass die Geraden A_1B_1, A_2B_2 etc. alle durch denselben (auf Verlängerung von AB ge-

legenen) Punkt hindurch gehen. Dieses Strahlenbüschel gibt dann nomographisch transformiert die obige Konstruktion. Zum Beweise bedenke man, dass eben die Existenz des gleichen Schwankungsquotienten das Zustandekommen des erwähnten Strahlenbüschels bedingt.

Von dieser Konstruktion kann man eine, wie die Folge zeigen wird, höchst wichtige Anwendung machen. Denkt man sich — um einen speziellen Fall zu haben — dieselbe für Orte ausgeführt, welche bei verschiedener Breite auf demselben Meridian liegen, dann werden die Schnittpunkte auf einer Kurve liegen welche graphisch die Abhängigkeit des Schwankungsquotienten von der Breite liefert.

Man wird so Gesetzmässigkeiten entdecken können, welche für die Meteorologie von grosser Wichtigkeit sind. Werden auf dieser Weise verschiedene Meridiane dargestellt, dann ergibt sich eine Isoplethenschaar, in welche auch die Landkarte in entsprechender Darstellung eingezeichnet werden kann.

Da sich die Nomograme in bekannter Weise leicht nach Bedarf umformen lassen, so kann solchen graphischen Darstellungen in allen Fällen auch die bequemste Form gegeben werden. Wir werden in der Folge sehen, dass sich auch Beziehungen zwischen mehr als drei Elementen in ebenso einfacher Weise darstellen lassen. Die Hauptsache ist aber, dass man immer jene Darstellungsweise wählen kann, welche am besten dem Charakter der Elemente entspricht.

Nachdem wir im Stande sind, die Abhängigkeit zweier klimatologischen Elemente a und b von einem gegebenen Argumente $\varkappa$ graphisch darzustellen, wird es leicht, auch die algebraische Beziehung

$$F(a, b, \varkappa) = 0$$

zu finden. Man nehme zu diesem Zwecke, eine der beiden parallelen Geraden als Ordinatenachse an, und lasse die Abscissenachse mit der Verbindungsgeraden zusammenhalten. Nach bekannten Regeln der angewandten Mathematik, werden sodann der Zeichnung die Beziehungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad x = \psi(\varkappa)$$

entnommen. Aus der Konstruktion folgt weiters die Gleichung

$$y = \frac{ab}{a+b},$$

so dass schliesslich:

$$\varphi\left\{\psi(\varkappa), \frac{ab}{a+b}\right\} = 0,$$

als die verlangte Beziehung resultiert.

In analoger Weise sind auch zwei Argumente zu behandeln. Man nehme zunächt das eine als kostant an, und zeichne die Kurve. Wird dasselbe variiert, dann ergibt sich eine Kurvenschaar, deren Kotierung die Zugeordnete liefert.

Wir wollen das Gesagte an Beispielen klar machen.

Um den Einfluss der Annäherung an ein Gebirge auf die Niederschlagsmenge, an einem möglichst einfachen Beispiel zu studieren, nehmen wir die von Hann in seiner Klimatologie (III. Afl. S. 254) mitgeteilten Daten, aus welchen nachstehendes Täfelchen folgt:

Ort	*Dacca*	*Bogra*	*Mymensingh*	*Silhet*	
Entfernung*)	161	96	48	32	*km.*
Regenmenge	191	231	275	380	*cm.*

Die Konstruktion des Nomograms ergab, dass die Schnittpunkte nahezu an einer Geraden liegen, welche die Entfernungs-Gerade im Punkte + 16 *km*, und die Regenfall-Gerade in 190 *cm* schneidet.

Daraus lässt sich in einfachster Weise die Beziehung zwischen Regenfall und Entfernung finden.

Bezeichnen wir, mit a die Entfernung in *km*, ferner mit b die Regenhöhe in *cm*, so muss zwischen diesen Grössen, falls ihre nomographische Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, welche die a-Achse im Punkte α (hier gleich + 16 *km*) und die b-Achse im Punkte β (hier gleich + 190 *cm*) schneidet, die Beziehung

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1,$$

bestehen. Daraus folgt, dass in erster Näherung

$$b=\frac{\beta}{1-\frac{\alpha}{a}}=\frac{190}{1-\frac{16}{a}}$$

geschrieben werden kann.

Mit Hilfe dieser Formel wurde nachstehende Tafel berechnet:

Ort	Regenhöhe		Diff.
	Beob.	Berechn.	
Silhet	380	380	0
Mymensingh	275	285	— 10
Bogra	231	228	+ 3
Dacca	191	204	— 13

*) Von Fuss des Khassiagebirges.

Sehr schöne regelmässige Kurve erhält man, wenn man die Zahlen (l. c. S. 252) in dieser Weise behandelt, welche die Steigerung des Regenfalls in Java, landeinwärts von der Küste dastellen. Es empfiehlt sich dabei die Entfernungen, im Maasstab 1 *km* = 5 *mm* und die Regenmengen, im Maasstab 1 *cm* = 0,5 *mm* zu nehmen. Wir wollen dieses Beispiel rein rechnerisch durchführen, wobei wir den Leser ersuchen, zur Kontrolle die Zeichnung selbst zu zeichnen. Der Abstand beider Parallelen möge 300 *mm* genommen werden.

Die numerischen Grundlagen liefert die nachstehende Tabelle:

Ort	*Batavia*	*M. Cornelis*	*Pasar M.*	*Depok.*	*Bodjong.*	*Buitenzorg*
Entf. von der Küste	7	11	17	33	43	58 *km*
Höhe	7	14	35	92	130	265 *m*
Regenmenge	183	195	233	312	357	437 *cm*

Die Zahlen sind 28jährige Mittelwerte, also ziemlich sicher. Behalten wir unsere Bezeichnungen bei und nennen e die Entfernung in *km*, r die Regenmenge in *cm*, so wird in Millimetermaas

$$a = 5e, \quad b = \tfrac{1}{2} r.$$

Die Entfernungsachse soll die Y∖ Achse sein. Die Koordinaten der nomographischen Kurve mögen mit x und y bezeichnet werden. Für ihre Berechnung sind die nachstehenden Gleichungen zu verwenden:

$$y = \frac{ab}{a + b}$$

$$x = \frac{300\,y}{b}$$

Mit ihrer Hilfe berechnen wir zunächst nachstehende Tafel:

	x	y	a	b
Batavia	82	25	35	92
M. Cornelis	108	35	55	98
Pasar M.	126	49	85	117
Depok.	154	80	165	156
Bodjonk.	164	98	215	179
Buitenzorg	171	125	290	219

Die Gestalt der gezeichneten Kurve ist die einer Logarithmischen. In der Tat, wird sie sehr nahe durch die Gleichung

$$\log y = \frac{3}{4} \left\{ \frac{x}{100} + 1 \right\}$$

dargestelt. Diese liefert

y	Beob.	25	35	49	80	98	125
y	Berechn.	23	36	49	80	96	108

Die Abweichung im letzten Werte, ist wohl durch die Bemerkung Hann's erklärbar, welcher sagt: „Buitenzorg hat in Südwesten den Berg Sálak (2190 m) und gegen Südosten den Gédeh, der 2990 m hoch ist. Das Terrain beginnt hier beträchtlich zu steigen."

Wir können somit sagen, dass der normale Wert für Buitenzorg etwa 108 beträgt; die Differenz $125 - 108 = 17$, ist schon auf die Rechnung der erwähnten orographischen Verhältnisse zu setzen*).

Dass dem so ist, beweist auch der Umstand, dass durch Hinzuziehung einer neuen Konstante, die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler sich nur unerheblich ändert. So zeigt uns schon die Rechnung, dass der Wert nicht normal ist.

Durch die entwickelten Gleichungen ist die algebraische Abhängigkeit der Grössen a und b vollständig bestimmt.

In analoger Weise, lässt sich die Abhängigkeit der Zunahme der jährlichen Niederschlagsmenge mit der Höhe, studieren.

Wir benützen hiezu die Angaben Hann's (Klimatologie, S. 255). Ohne uns auf Detail einzulassen, geben wir gleich die Resultate.

Die Zahlen für Belgien (nach Lankaster) geben eine Gerade. Die Angaben von Schreiber für Sachsen, von Hann für das deutsche Mittelgebirge und von Gravelius**) (Erzgebirge Nordwestseite) geben übereinstimmend eine und dieselbe reine logarithmische Kurve. Trägt man nämlich auf die Ordinaten ihre (gemeine) Logarithmen, so liegen alle diese Punkte auf einer und derselben Geraden. Die Beziehung zwischen Höhe und Niederschlag, innerhalb der benützten Gebiete, ist dadurch vollkommen scharf bestimmt.

Etwas abweichende Kurven liefern dagegen Böhmen und Schwarzwald.

*) Man vergleiche dazu das in Hann Klimatologie III. Aufl. S. 288 und 289 Gesagte.

**) Zur Abhängigkeit des Regenfalls von der Meereshöhe. Zeitschr. f. Gewässerkunde, 7 Band.

Der logarithmische Charakter bleibt aber erhalten.

Diese Beispiele mögen genügen. Sie zeigen, dass man bei diesem Verfahren gleich ohne alle Versuche auf das Ziel lossteuert.

Auf eines möchten wir aber aufmerksam machen. Es darf nicht aus einer isolierten Beziehung ein Gesetz abgeleitet werden. Alle zur Verfügung stehende Daten müssen herangezogen werden, wenn man nicht durch falsche Beziehungen irregeführt werden soll.

Nehmen wir beispielsweise das von Gravelius für gesamten Schwarzwald erhaltene Material (nach Hann) so folgen aus der Tabelle für die Höhenstufen

300	500	700	900	1100	1300 *m*

die Regenmengen

772	975	1160	1353	1657	1800 *mm*

und aus diesen die Unterschiede (Regenmenge — Höhenstufe)

472	475	460	453	557	500

sehen wir also von den letzteren zwei Zahlen ab, so ergibt sich für Schwarzwald bis zu 1000 *m* Höhe die Beziehung.

Regenmenge = Höhe + 465.

Diese Relation passt aber auf keine der übrigen Reihen. Der einzig richtige Weg ist der, dass man für jedes Profil extra die Kurve zeichnet und aus der Gesamtheit der Kurven auf die Gesetze schliesst. Auch darf man nicht vergessen, dass durch Beobachtungen nur Kurventeile zur Verfügung stehen.

Wir sind also im Stande, Relationen zwischen klimatologischen Elementen aufzusuchen und zu konstatieren, ob dieselben überhaupt bestehen.

Dieses Verfahren welches wir nomographisch nennen wollen, kann zwar durch die üblichen graphischen Koordinatenmethoden ersetzt werden, dann gehen aber alle die Vorteile verloren, welche die Nomographie bietet, und welche dieser Methode in der Neuzeit so grosse Verbreitung gesichert haben.

Auf einen Umstand, welcher bei solchen Untersuchungen wohl zu beachten ist, möchte ich hier besonders aufmerksam machen. Man verwende möglichst lange Reihen, um so längere, je grösser die Variabilität der zu untersuchenden Elemente ist. Aber nicht nur hinreichend lang, sondern auch vollständig sollen die Reihen sein, d. h. ihren Charakter voll erschöpfen. Mit anderen Worten, alles was die Reihe charakterisiert und von anderen verwandten Unterscheidet, soll in der Reihe enthalten sein.

Um sich von der Vollständigkeit der Reihe zu überzeugen, muss man dieselbe mit anderen als typisch anerkannten vergleichen. Für das Wie, lassen sich keine allgemeine Regeln aufstellen.

Sollen z. B. die Schwankungen studiert werden, dann wird man oft mit Nutzen die ersten Ableitungen*) der Fundamentalreihen bilden und diese vergleichen. Zu diesem Zwecke ordnet man die Fundamentalreihe der Grösse nach und bildet das successive Mittel der äussersten Glieder. Stimmen diese hinreichend überein, so ist die Reihe vollständig.

Als Beispiel seien angeführt die 20jährigen Niederschlagsreihen von Riva und Arco, aus der Zeit 1881—1900.**) Beide Orte liegen nahe an einander und haben fast gleiche Seehöhe.

Riva:

Mittel: 1105 *mm* = *m*.

	1498	1433	1383	1351	1313	1251	1248	1238	1143	1092
	738	807	841	879	913	921	959	1005	1006	1090
Mittel:	**1118**	**1120**	**1112**	**1115**	**1113**	**1086**	**1104**	**1122**	**1075**	**1091**
Mittel — *m*:	+ 13	+ 15	+ 7	+ 10	+ 8	— 19	— 1	+ 17	— 30	— 14

Arco:

Mittel: (1018 *mm*) korr. 968 *mm* = *m*.

	1457	1293	1233	1197	1152	1124	1105	1094	1097	972
	532	626	640	748	798	817	861	899	912	932
Mittel:	**995**	**960**	**937**	**973**	**975**	**971**	**983**	**997**	**993**	**952**
Mittel — *m*:	+ 27	— 8	— 31	+ 5	+ 7	+ 3	+ 15	+ 29	+ 25	— 16

In der Publikation ist der Wert für Arco falsch (1018 *mm* statt **968** *mm*). Offenbar infolge eines Rechenfehlers von 100 *mm*. Der Anblick der Werte (Mittel — *m*) zeigt, dass die Reihe von Riva vollständiger ist als jene von Arco.

Bildet man aus den Werten $\frac{1}{2}$ (*Max.* + *Min.*) das Gesamtmittel, so erhält man das allgemeine Mittel.

Ich möchte diese Art der Mittelbildung sehr empfehlen.

Sie geht schnell von Statten, schützt vor groben Fehlern und liefert eine Einsicht in die Güte des Materials. Das Wichtigste an

*) Siehe meinen Aufsatz in der Z. f. Vermessungswesen, 1900, S. 593.

**) Ficker: Klimatographie von Tirol und Voralberg, S. 122.

ihr ist aber, dass sie uns darüber belehrt, ob die Regenkurve symmetrisch oder asymmetrisch gebaut ist.

III.

Der Schwankungsquotient, welcher das Verhältnis zwischen *Max.* und *Min.* charakterisiert, reicht nicht hin, um die Reihe genügend darzustellen.

Es ist notwendig noch eine weitere Relation einzuführen.

Als vorläufig die beste, möchte ich die relative Abweichungsdifferenz vorschlagen, welche sich ergibt, wenn man von der in Prozenten der zugehörigen Mittelwerte ausgedrückten Summe *Max.* + *Min.* die Zahl 200 subtrahiert. Man hat also für sie die Gleichung.

$$(r) = (Max.) + (Min.) - 200,$$

wobei die Klammer die Relativität der Zahlen anzeigen sollen. Oft wird es auch nützlich sein die absolute Abweichungsdifferenz, welche durch die Gleichung

$$r = Max. + Min. - 2m$$

definiert erscheint, in Betracht zu ziehen. Die Einführung dieser Grösse hat den Zweck eine Vermittlung zwischen dem Mittelwert und den Extremen herbeizuführen.

Ist s' die Abweichung des *Max.* vom Mittelwert, und s die Abweichung des Mittelwerts von *Min.*, so wird offenbar

$$r = (m + s') + (m - s) - 2m = s' - s$$

und

$$(r) = 100 \frac{s' - s}{m}.$$

Zu der Abweichungsdifferenz führt folgende Ueberlegung. Denkt man sich in eine Urne bezifferte Kugeln gelegt, welche den Relativzahlen des Bereiches vom Maximum zum Minimum entsprechen und wird je eine Kugel gezogen und in die Urne zurückgelegt, dann wird man falls die Zahl der Züge kleiner ist als die Differenz zwischen dem Maximum und Minimum, eine Zahlenreihe erhalten, welche der Grösse nach geordnet und graphisch aufgetragen sehr nahe einer Geraden entsprechen wird. Die Wahrscheinlichkeit eine Zahl zweimal zu ziehen, ist nämlich sehr klein. Für eine solche Reihe wird die Abweichungsdifferenz sehr nahe gleich Null.

Zeichnet man mit Hilfe der von Hellmann gegebenen Relativzahlen, nachdem man sie der Reihe nach geordnet hat, die entsprechenden

2

Kurven beispielweise für St. Fernando und Paris, so ergibt sich, dass Paris sehr nahe einer Geraden entspricht. Die Kurve von St. Fernando liefert ein ganz anderes Bild. Die Punkte schliessen sich mit Ausnahme der fünf grössten Werte sehr gut einer Geraden an, diese aber weichen ausserordentlich weit von ihr ab. Analogen Bau, weisst auch die Kurve von Lissabon auf.

Dass die Abweichungsdifferenz ein klimatischer Faktor ist, zeigt am deutlichsten die Tafel auf S. 46 der HELLMANN'schen Schrift „Untersuchungen über die Schwankungen der Niederschläge" Berlin 1909.

Aus ihr wurde nachstehende Tafel zusammengestellt:

San Fernando	+21	Greenwich	+ 9
Lissabon	+40	Brüssel	+ 6
Madrid	+26	Genf	+ 3
Perpignan	+37	St. Bernhard	+ 5
Genua	+66	Modena	+ 9
Rom	+35	Triest	+ 9
Hermannstadt	+55	Upsala	+ 8
Baku	+66		
		Güterloh	— 1
Tiflis	+16	Berlin	— 7
Edinburg	+13	Görlitz	— 3
Rothesay	+18	Trier	— 2
Warschau	+15	Stuttgart	— 5
		Kopenhagen	— 5
Wien	+ 5	Moskau	— 1
Ovideo	+ 6	Katharinenburg	— 8
Dijon	+ 4		
Paris	+ 9	Königsberg	—18

Diese Tafel bekräftig die von HELLMANN besonders betonte Tatsache, dass die Maxima sich mehr über das Mittel erheben als die Minima unter ihm bleiben.

Ein Beispiel der Abhängigkeit der Abweichungsdifferenz von der Ortlage, geben wir weiter unten.

Die Abweichungsdifferenzen im Verein mit den Schwankungsquotienten geben brauchbare Winke über die Vergleichbarkeit zweier Beobachtungen.

Es wird nicht überflüssig sein, ehe wir weiter gehen, einem Beispiel die Verwendbarkeit der eingeführten Grössen plausibel zu machen.

Das Material hiezu verdanke ich der Güte des Herrn Geheimrat HELLMANN.

Es betrifft ein Meridianprofil von Australien, welches HELLMANN (l. c. S. 55) anführt. Wir geben zunächst die Grundlagen.

Nr.	Station	öst. L.	südl. Br.	m	Max.	Min.	$\frac{\text{Max.}}{\text{Min.}}$
1.	Port Darwin	130° 51′	12° 28′	1596	2076	1078	1·9
2.	River Katherine . .	132 19	14 30	1020	1496	480	3·1
3.	Daly Waters	133 23	16 16	701	1115	228	4·9
4.	Tennent's Creek . .	134 15	19 36	397	664	116	5·7
5.	Barrow's Creek . . .	133 53	21 37	313	794	84	9·5
6.	Charlotte Waters . .	134 55	25 56	144	301	29	10·2

Die Station Port Darwin liegt zwar etwas ausserhalb des betrachteten Meridians, aber die HUNT'sche*) Regenkarte von Australien zeigt, dass ihr Wert auch für ihn gilt.

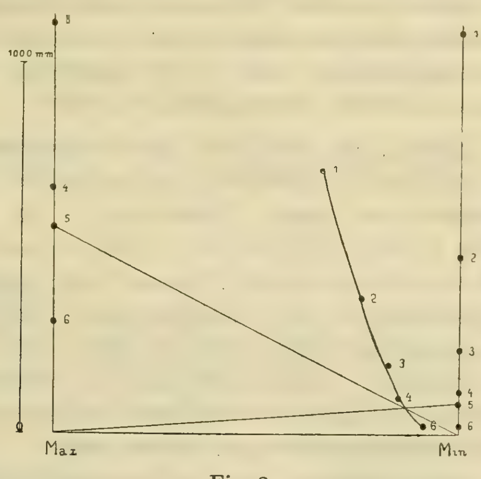


Fig. 2.

Beim ersten Anblick scheint in der Tafel alles in Ordnung zu sein. Niemand würde in ihr einen groben Fehler suchen. Bildet man aber die absoluten Abweichungsdifferenzen, so ergeben sich nachstehende Zahlen:

— 38 — 64 — 59 — 14 + 252 + 42

*) Commonwealth Bureau of Met. Melbourne. Bull. Nr. 2 (July 1908).

Daraus folgt, dass die Station Barrow's Creek verdächtig ist. Um den Fehler zu finden, konstruieren wir mit Auslassung dieser Station das Nomogram. Wir sehen dass die Punkte 1) 2) 3) 4) 6) sich sehr gut einer Kurve fügen. (Siehe Fig. 2.)

Nachdem das *Min.* der Station offenbar gut in die Tafel passt, nehmen wir dasselbe als richtig an, und konstruieren zu dem Minimumpunkt *5) = 84 *mm* mit Hilfe der Kurve, das zugehörige *Max.* Es findet sich die Zahl 560 *mm* = 22 inch., während das wirkliche *Max.* 794 *mm* = 31·27 inch. (nach der Angabe Hellmann's) betragen soll.

Nehmen wir an, dass ein Schreibfehler vorliegt und statt 31·27 die Zahl 21·27 zu lesen ist, so wird die Abweichungsdifferenz gleich — 2 *mm.* Diese Zahl ist auch zu erwarten, denn die Fortsetzung der Reihe der Abweichungsdifferenzen bis an Küste, gibt lauter positive Werte.

Aus dieser Untersuchung folgt, dass die Zahl 31·27 höchst wahrscheinlich falsch ist und 21·27 gelesen werden muss. Beim Hellmann liegt jedenfalls kein Druckfehler vor, weil der Schwankungsquotient 9·5 tatsächlich der Zahl 31·27 entspricht. Der richtige Schwankungsquotient dürfte also ungefähr 6·7 sein.

Hellmann gibt (l. c.) auch noch eine Fortsetzung aber längst des Meridians 138° öst. L. Dieselbe liefert nur positive absolute Abweichungsdifferenzen und zwar: Cowarie (+ 29), Kanowana (+ 19), Farina (+ 26), Blinmann (+ 36), Clare (+ 53), Kapunda (+ 78), Adelaide (+ 48). Daraus folgt, dass in Australien die Abweichungsdifferenzen der Meridianprofile vom Norden gegen Süden zuerst negativ und dabei bis in die Mitte des Kontinents bis um Nullwerte abnehmen. Weiterhin werden sie positiv und wachsen bis an die Küste. Es scheint überdiess, dass bei Küstennähe der absolute Wert der Abweichungsdifferenzen kleiner wird.

Die Abweichungsdifferenz und der Schwankungsquotient geben zwei Gleichungen zwischen den drei Grössen *Max.*, *Min.* und *m.* Eine dritte Gleichung existiert nicht, an ihre Stelle muss eine Regenkarte treten.

Diese wird zeigen, ob sich ein oder besser mehrere durch den verlangten Ort gehende Regenprofile zeichnen lassen. Die mittlere Regenmenge kann dann graphisch dem Profil entnommen oder auch, wo es sich um grössere Genauigkeit handelt, numerisch in einfachster Weise berechnet werden. Ein Beispiel geben wir weiter unten.

Dadurch ist unsere Aufgabe gelöst. Durch das Nomogram erhalten wir die extremen Werte und durch das Profil den Mittelwert. Mit Rücksicht auf die oft geringe Genauigkeit der Daten dürfte die graphische Methode den Vorzug verdienen. Um zu einer gegebenen geographischen Breite den entsprechenden Punkt der nomographischen Kurve zu finden, hat man einfach diese auf die *Min.*-Achse zu projizieren.

Man erhält so eine kotierte Gerade, auf welcher nach bekannten Verfahren der graphischen Interpolation der gesuchte Punkt leicht zu finden ist.

Um an unserem Beispiel das numerische Verfahren zu zeigen, werde angenommen dass eine Argumentenreihe.

$$a \quad b \quad c \quad d \ldots$$

vorliegt, zu welcher die Funktionswerte

$$A \quad B \quad C \quad D \ldots$$

gehören. Es soll für einen, zwischen a und b liegenden Argument x, der zugehörige Funktionswert X berechnet werden.

Man berechne zu diesem Zwecke nachstehende Grössen

$$\partial_{AB} = \frac{A - B}{a - b}, \quad \partial_{BC} = \frac{B - C}{b - c}, \quad \ldots$$

$$\partial\partial_{AC} = \frac{\partial_{AB} - \partial_{BC}}{a - c}, \quad \partial\partial_{BD} = \frac{\partial_{BC} - \partial_{CD}}{b - d}, \quad \ldots$$

$$\partial\partial\partial_{AD} = \frac{\partial\partial_{AC} - \partial\partial_{BD}}{a - d}, \quad \ldots$$

Dann wird:

$$X = A + (x - a)\,\partial_{AB} + (x - a)(x - b)\,\partial\partial_{AC} + (x - a)(x - b)(x - c)\,\partial\partial\partial_{AD} + \ldots$$

Als Beispiel soll die mittlere Niederschlagsmenge von River Katherine aus nachstehenden Daten berechnet werden:

Port Darvin	$a = 12^\circ\,28' = 12{\cdot}5$,	$A =$	1596
Daly Waters	$b = 16^\circ\,16' = 16{\cdot}3$,	$B =$	701
Fennent's Creek . . .	$c = 19^\circ\,36' = 19{\cdot}6$,	$C =$	397
Barrow's Creek . . .	$d = 21^\circ\,37' = 21{\cdot}6$,	$D =$	313
River Katherine . . .	$x = 14^\circ\,30' = 14{\cdot}5$,	$X =$	?

Es ergibt sich hieraus:

$$x - a = +\,2{\cdot}0 \qquad \partial_{AB} = -\,235{\cdot}5$$

$$x - b = -\,1{\cdot}8 \qquad \partial\partial_{AC} = +\,20{\cdot}2$$

$$x - c = -\,5{\cdot}1 \qquad \partial\partial\partial_{AD} = -\,1{\cdot}2$$

somit

$$X = 1596 - 471 - 73 - 22 = 1030,$$

während der beobachtete Wert + 1020 beträgt. Die Übereinstimmung ist also eine sehr befriedigende.

Sie zeigt dass die in der Tafel angegebenen Niederschlagsmengen schon der Wahrheit ziemlich nahe kommen.

Diese numerische Interpolation wird jedoch nur danu zu empfehlen sein, wenn sehr gesicherte Reihen vorliegen, in der Regel dürfte das graphische Verfahren genügen und empfehlenswerter sein, schon seiner Uebersichtlichkeit wegen.

Die Reduktion der klimatologischen Elemente ist nur ein Interpolationsproblem, aber ein Interpolationsproblem im höheren Sinne, wobei nicht nur die mathematischen Theorien zur Anwendung kommen, sondern alles was man über die Erscheinung weist zur Geltung gebracht werden muss.

IV.

Während wir so über das Jahresmittel und die extremen Schwankungen belehrt werden, erfahren wir nichts über die Natur der Jahreskurve.

Auch hier lassen sich interpolatorische Grundsätze in Anwendung bringen, wie an einem Beispiele gezeigt werden soll, bei welchem zugleich die nomographische Darstellung sich als nützlich erweist.

Das Material hiezu liefert uns die 2. Tabelle in Hellmann's Schwankungen der Niederschläge, aus welcher (S. 22 l. c.) der Schluss gezogen wird, dass ausser dem ozeanischen und reinen kontinentalen Regentypus, in Europa Ueberlagerungen beider vorkommen. Nehmen wir an, dass keine Nebenursachen vorhanden sind, und bezeichnen mit K den kontinentalen und mit O den ozeanischen Typus, dann wird die Regenkurve R innerhalb dieses Gebietes darstellbar sein durch eine Gleichung von der Form

$$R = \alpha K + \beta O,$$

wo α und β zwei Bestimmungskoefizienten sind.

Um auf diese Form unsere Methode anwenden zu können, setzen wir

$$\alpha = \frac{p}{p+q}, \qquad \beta = \frac{q}{p+q},$$

woraus sich sofort

$$\frac{R-K}{O-R}=\frac{q}{p}$$

ergibt. Das ist aber unsere Fundamentalgleichung.

Besteht abso die Gleichung

$$R=\alpha K+\beta O,$$

dann liegt die Punktgerade parallel zu den beiden Fundamentalgeraden und teilt den senkrechten Abstand beider im Verhältnisse

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q}.$$

Ein Beispiel dürfte nicht überflüssig sein.

Um die ozeanische Kurve zu finden nehmen wir die Orte San Fernando (1), Lissabon (2) und Palermo (3), diese liefern (S. 16. l. c.).*)

	J	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*
(1)	12·8	11·0	12·6	8·4	6·2	1·5	0·2	0·6	4·0	12·5	15·4	15·0
(2)	13·0	11·7	12·2	9·5	7·3	2·1	0·4	1·1	4·3	11·6	13·9	12·9
(3)	13·1	10·6	10·7	8·2	4·4	2·1	0·9	1·8	5·9	13·1	13·7	15·5
Mittel: *O*	13·0	11·1	11·8	8·7	6·0	1·9	0·5	1·2	4·7	12·4	14·3	14·5

Die kontinentale Kurve ist minder genau bestimmbar, nur die Orte Hermannstadt (4) und Katharinenburg (5) sind zu ihrer Bestimmung geeignet. Man erhält:

	J	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*
(4)	3·4	3·8	5·9	7·4	12·7	16·9	15·8	11·7	7·2	5·7	5·2	4·3
(5)	2·3	2·0	2·6	3·7	10·6	19·2	18·3	16·1	10·6	6·3	5·0	3·1
Mittel: *K*	2·9	2·9	4·3	5·6	11·7	18·1	17·2	14·0	8·9	6·0	5·1	3·7

Als die zu studierende Kurve, sei angenommen das arithmetische Mittel: Dijon (6), Pouilly-en-Auxois (7) und Paris (8), welche nahezu gleiche Kurven liefern.

	J	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*
(6)	6·7	5·2	6·6	7·1	8·4	11·0	8·9	9·3	8·3	11·8	9·1	7·6
(7)	6·9	5·5	7·1	7·6	8·8	10·4	8·8	9·0	8·1	11·6	8·6	7·6
(8)	7·2	5·2	6·8	7·3	9·1	10·3	9·5	8·9	9·0	10·6	8·4	7·7
Mittel: *R*	6·9	5·3	6·8	7·3	8·8	10·6	9·1	9·1	8·5	11·3	8·7	7·6

*) Diese Kurve stellt keineswegs den reinen ozeanischen Typus dar Vergl. HELLMANN, Schwankungen etc. S. 25. Nr. 7. Ich habe aber die Benennung der Kürze wegen beibehalten.

Das graphische Verfahren liefert eine Kurve (R), welche der Gleichung

$$(R) = \frac{3}{5} K + \frac{2}{5} O$$

entspricht. Die nachstehende Tafel gibt die Abweichungen gegen die wirkliche R-Kurve.

	J	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*
R	6·9	5·3	6·8	7·3	8·8	10·6	9·1	9·1	8·5	11·3	8·7	7·6
(R)	6·9	6·2	7·3	6·8	9·4	11·6	10·5	8·9	7·2	8·6	8·8	8·0
Diff.	0·0	—0·9	—0·5	+0·5	—0·6	—1·0	—1·4	+0·2	+1·3	+2·7	—0·1	—0·4

Die Uebereinstimmung ist innerhalb der Unsicherheit der Werte K und O eine vollkommene. Die (R)-Kurve hat mit der R-Kurve einen identischen Charakter. Im Monate Oktober findet sich die grösste Abweichung.

Mehr darf man aber von dieser Kurve nicht erhalten, da ja auch andere Ursachen, an der Bildung der Regenkurve beteiligt sind.

Wir haben also den Satz:

Entsteht eine Regenkurve (R), durch Kombination der beiden extremen Typen des Ozeanischen (O) und des Kontinententalen (K), dann ist für sie der Quotient

$$\frac{R - K}{O - R}$$

eine konstante Zahl. Unsere Methode liefert ein einfaches graphisches Mittel, sie zu bestimmen.

Der Begriff der Kontinentalität wie er hier für die Niederschläge eingeführt wurde, ist zunächst r e i n a l g e b r a i s c h e r N a t u r. Ebenso wie in Bezug auf die Temperaturverhältnisse, besondere Untersuchung erst die Klärung dieses Begriffes beibrachte, wird auch hier zu untersuchen sein, in wie weit diese mathematisch fixierte Berechnung der Kontinentalität des Niederschlages, dem wirklichen geographischen Begriff entspricht. Zenker hat in seinen bekannten Arbeiten*) den Begriff der thermischen Kontinentalität festgestellt und untersucht. Der Begriff der Niederschlagskontinentalität braucht sich mit jenem der Thermischen nicht zu decken, da ja beim Niederschlag andere Faktoren die Grösse bestimmen als bei der Temperatur. Die Niederschlagsmenge nimmt beispielweise, mit der Entfernung von der Küste ab, bei der Temperatur liegen die Verhältnisse ganz anders.

*) Der thermische Aufbau der Klimate. Halle 1895. Nova Acta, B. 67.

Während also z. B. in Wien in thermaler Hinsicht die Luft gleichsam aus $^1/_3$ Landluft und $^2/_3$ Seeluft zusammengesetzt ist, ist beim Niederschlag das Verhältnis fast umgekehrt, indem die Niederschlagskurve sich nahezu aus $^2/_3$ der Landkurve und $^1/_3$ der Seekurve zusammensetzt. —

Zum Schlusse dieser Mitteilung möchten wir auf eines aufmerksam machen. Die Interpolationsrechnung zeigt, wie man n beliebig gegebene Punkte immer durch eine Kurve verbinden kann, deren algebraisches Kleid durch die Interpolationsformel geliefert wird. Diese Kurve braucht aber nicht immer dem algebraischen Ausdruck des Gesetzes zu entsprechen, nach welchem die Punkte tatsächlich aufeinander folgen.

Man wird daher immer trachten sich zu vergewissen, ob die Kurve mehr als eine Interpolationskurve ist. Dieses kann auf zweierlei Weise geschehen.

Erstens durch anderweitige Bestätigung eines interpolierten Wertes und dann dadurch, dass man einige gegebene Zahlen auslässt und sie nachträglich mit den aus der Kurve interpolierten vergleicht. Diese Prüfung ist speziell bei den Niederschlägen nie zu unterlassen. Abweichungen welche sich zeigen, sind oft tatsächliche, durch lokale Verhältnisse bedingte, wie wir an einem Beispiel kennen gelernt haben.

Endlich muss gefordert werden, dass in jedem Falle der mittlere Fehler bestimmt werde, um zu wissen wie genau die gegebene Zahl ist. Dieser für die Meteorologie so hochwichtige Begriff des mittleren Fehlers bedarf einer besonderen Untersuchung. Die Meteorologie muss sich einmal mit diesem Begriffe abfinden und ihn entsprechend praecissieren.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

XII.

Über eine Stromatoporoide aus böhmischem Devon.

Von Prof. F. Počta.

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juni 1910.

In der letzten Zeit kam in die Sammlungen des Museums des Königreiches Böhmen eine ungewöhnlich grosse Kolonie der Gatt. *Clathrodictyon* aus dem Hlubočeper Kalkstein (Barrande's bande G—g3) von Hlubočep und wurde mir vom Director der geolog. palaeontologischen Abteilung Herrn Prof. A. Frič zur Bestimmung gefälligst übergeben. Die im geologischen Institute der böhm. Universität angefertigten Dünnschliffe, welche durch 2 verschieden gerichtete Schnitte erhalten wurden, zeigten einen sehr günstigen Erhaltungszustand der Struktur, so dass viele Merkmale beobachtet werden konnten, die zur besseren Kenntnis der palaeozoischen Stromatoporiden beitragen können.

Die Kolonie gehört der von mir im J. 1894 aus den Koněpruser Schichten (F—f2) beschriebenen Art *Clathrodictyon clarum* an (Barrande J. Système silurien du centre de la Bohême. Vol. VIII. Tome I. pag. 152, Pl. 18. fig. 7 und 8.)

Das mir damals vorliegende und aus der Barrandeschen Sammlung stammende Original war aber von so geringen Dimensionen und überhaupt so unzulänglich, dass eine eingehendere Untersuchung nicht möglich war. Es konnte z. Beisp. nur ein radialer Schnitt durch das Bruchstück der Kolonie geführt werden und demzufolge auch nur ein in dieser Richtung orientierter Dünnschliff angefertigt werden.

Dieser Umstand und nebstdem die aussergewöhnlichen Dimensionen, so wie die günstige Erhaltung der inneren Struktur bewogen mich, die neue, aus einem anderen Horizonte stammende Akvisition

der Museumssammlungen näher zu untersuchen und über die Resultate meiner Studien hier zu berichten.

Die Kolonie hat die Form einer breit ovalen, dicken Platte mit etwas spitz abgerundeten Rändern. In der grösseren Axe misst die etwas unregelmässige Ellipse 58 *cm*, in der kürzeren 51 *cm* und ihre Dicke, die beinahe überall gleich bleibt, beträgt 10·5 *cm* (sieh Fig. 1.). Somit ist diese Form die grösste von allen bisher bekannten Stromatoporoiden-Kolonien.

Was die Literatur der Stromatoporoiden anbelangt, so bleibt Nicholson's Werk: A Monograph of the british Stromatoporoids in den Schriften der Palaeontographical Society 1886—1892 noch immer grundlegend und unübertroffen. In dieser grossen Arbeit werden auch alle älteren Quellen angeführt und eingehend beurteilt (sieh Historical Introduction pag. 1—27 und Supplement pag. 229—232), so dass jedem späteren Beobachter die Zusammenstellung der älteren Literatur erspart wird. In der Zeit nach dem Erscheinen dieser Arbeit wurde sehr wenig neues zugetan. Meist wurden nur locale Faunen beschrieben und hie und da neue Arten bereits bekannter Gattungen aufgestellt. Hiebei wurde allerdings die Kenntniss dieser ausgestorbenen Gruppe in mancher Richtung erweitert, da viele Merkmale einzelner, oft neuer Arten beobachtet und festgestellt wurden. Hier wäre meine oben angeführte Arbeit über Stromatoporoiden aus dem Silur und Devon Böhmens zu erwähnen, in welcher 13 neue Arten — 3 aus dem Silur und 10 aus dem Devon — beschrieben und abgebildet wurden.

Weiters wären noch andere kleinere Mitteilungen anzuführen, wie W. A. Parks, Notes on silurian Stromatoporoids from Hudson's Bay in Ottawa Naturalist Vol. 22, 1908, dann weitere Arbeiten desselben Autors: The Stromatoporoids of the Guelph Formation in Ontario, University Library Toronto 1970, Niagara Stromatoporoids, ibid. 1908, Silurian Stromatoporoids of America, ibidem 1909, Dr. G. H. Girty in 48 the Report of the Regents of the New-York State Museum 1894, Dr. J. W. Spencer: Stromatoporoidae of the upper Silurian in Bull. Museum University of Missouri 1882, A. W. Grabau and H. W. Shimer, North American Index Fossils I. School of Mines Quarterly, 1906, etc.

Mehr Interesse erwecken die Berichte über Stromatoporoiden aus jüngeren Formationen, wie z. Beisp. aus Karbon (G. Gürich, Eine Stromatoporoide aus dem Kohlenkalk Galiziens, in Beiträgen z. Palaeontologie u. Geologie Österr. Ungarns 1904.) und insbesondere die in letzter Zeit häufigeren Funde dieser alten Gruppen in den mesozoischen

Ablagerungen. Sieh A. Tornquist, Über mesozoische Str. in Sitzungsber. köngl. preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1901, K. Deninger, Einige Tabulaten und Hydrozoen aus mesozoischen Ablagerungen. Neues Jahrbuch f. Mineralogie, Geol. u. Palaeont. 1906 B. I. pag. 61. (Sieh Literaturverzeichnis pag. 68.) P. Bakalov, Stromatorhiza, eine Stromatoporide aus dem ob. Rauracien etc., ibidem.

Die Wachstumverhältnisse der zu beschreibenden Kolonie sind sehr interessant. Auf der unteren Oberfläche derselben verlaufen einzelne Kalkblätter (laminae) in gewundenen Linien und zwar sind die ältesten d. i. die innersten derselben um 3 Punkte umgebogen, die jüngeren Kalkblätter zeigen noch jederseits an 2 Stellen eine Einbiegung, wogegen die jüngsten in einfach elliptischen, dem äusseren Umfange parallelen Bögen verlaufen. Daraus ersieht man, dass diese Kolonie anfangs aus 3 kleineren, ursprünglichen, durch immer neue Umwindung jüngerer Kalkblätter entstanden ist. Mit dieser Fläche sass die Kolonie auf; eine scharf umschriebene Anheftungsfläche ist aber nicht zu sehen, wahrscheinlich war die Kolonie mit der ganzen unteren Fläche angewachsen, oder doch mit mehreren Anheftungstellen aufsitzend, was ja schon daraus zu schliessen ist, dass jede von den ursprünglichen 3 kleineren Kolonien, die den Grundstock bildeten, mit eigener selbstständiger Anheftungsfläche versehen war.

Was den Erhaltungszustand der Kolonie und ihre petrographische Beschaffenheit anbelangt, so ist, wie das Skelet selbst, so auch die Zwischenräume aus krystalinischem Kalkspat. Es ist dies also das von Nicholson eingehend besprochene, bereits veränderte Stadium, wo das Skelet — ursprünglich aus Aragonit aufgebaut — in Kalzit umgewandelt wurde. Dieser Erhaltungszustand ist auch der Grund, dass auch bei dieser Art, wie bei allen bisher untersuchten palaeozoischen Stromatoporoiden die Mikrostruktur des Gerüstes alteriert ist und nicht bis in Einzelnheiten studiert werden kann. Bemerkt sei noch, dass der die ganze Kolonie aufbauender Kalkstein ziemlich dolomitisch ist.

Eine Epithek ist auf der unteren Fläche der Kolonie nicht nachweisbar, sondern es kommen überall die Umrisse der Kalkblätter zum Vorschein. Die Oberfläche scheint überhaupt bei der Fossilisation so stark gelitten zu haben, dass die feinere oberflächliche Skulptur verloren ging.

Auf der unteren Fläche sind nur kleine Partien von der den Stock bedeckenden Oberflächenschichte erhalten; auf der oberen Fläche ist diese Schichte in grösseren und zahlreicheren Stücken zu sehen. Sie trägt rundliche, halbkugelförmige Warzen, die etwa 1·5 bis 3 *mm*

im Durchmesser breit und gleichmässig, jedoch ohne Regel zerstreut sind.

Astrorhizen sind auf der Oberfläche sehr selten und nur schwach angedeutet, obzwar sie in tangentialen Dünnschliffen ziemlich häufig beobachtet werden können.

Bekanntlich besteht das Gerüst der Hydractinoiden Gruppe der Stromatoporiden aus 2 Hauptelementen:

1. den Kalkblättern (laminae) und
2. den Pfeilern (pili).

Beide diese Elemente sind bei *Clathrodictyon* und insbesondere bei der Art *Cl. clarum* Poč. deutlich entwickelt und unterscheidbar, so dass diese Art für den Typus der rectilinearen Structur Stromer's dienen kann (Lehrbuch der Palaeozoologie I. 1909, pag. 72.).

In Betreff der Deutlichkeit dieser beiden Hauptelemente kann man unter den von Nicholson beschriebenen Arten der Gattung *Clathrodictyon* 2 Gruppen unterscheiden: 1. Die Kalkblätter verlaufen horizontal (tangentiell) und mit einander parallel, die Pfeiler sind scharf von ihnen unterschieden und stehen auf ihnen senkrecht.

Hieher gehören die Arten

regulare Ros. sp. Nicholson l. c. Taf. XVIII. Fig. 10 u. 10a.
striatellum d'Orb. sp. Nich. l. c. Taf. I. Fig. 1. Taf. V. Fig. 3. und Taf. XIX. Fig. 8 u. 11.

Dann die aus Amerika beschriebenen Arten:

ostiolatum Nich. Parks Guelph. Taf. II. Fig. 2.
Jewetti Girty, Rep. Mus. Pl. VI. Fig. 5.

und vielleicht einige unter

drummondense Parks, Niagara, Pl. VIII. Fig. 3 angeführten Formen.

2. Kalkblätter und Pfeiler bilden zusammen ein blasiges Geflecht, in welchem beide Hauptelemente oft nicht leicht sich unterscheiden lassen. Die Pfeiler sind auf den Kalkblättern nicht senkrecht, sondern schräg gestellt.

Hieher gehören:

vesiculosum Nich. Murie, Nich. l. c. Taf. XVII. Fig. 10 u. 13.
variolare Ros. sp. Nich. l. c. Taf. XVIII. Fig. 1 u. 3.
crassum Nich. l. c. Taf. XVIII. Fig. 6 u. 7.
fastigiatum Nich. l. c. Taf. XIX. Fig. 5.
confertum Nich. l. c. Taf. XVIII. Fig. 13.

Aus Amerika werden angegeben:

cystosum Rom. Parks Niagara Pl. I. Fig. 2, 3 u. 4.

und die Form

drummondense Parks Niagara Pl. VII. Fig. 5.

Die Struktur dieser zweiten Gruppe ist eine so typische, dass es vielleicht angezeigt wäre, diese Gruppe von der regelmässig rectilinearen Art *regulare* abzutrennen und auch durch einen neuen Namen ihrer Selbstständigkeit Ausdruck zu geben. Allerdings wäre dann die wunderbare Art *striatellum* eine Verbindung beider Gruppen.

Zum Typus der Gatt. *Clathrodictyon* wäre die regelmässige Struktur zu wählen, welche bei *Actinostroma* vorkommt. Denn diese Gattung unterscheidet sich von *Clathrodictyon* nur dadurch, dass die Pfeiler mehrere Interlaminarräume durchsetzen, wogegen sie bei *Clathrodictyon* immer nur auf einen Interlaminarraum beschrenkt bleiben.

In dieser Hinsicht entsprechen die Arten aus dem Silur und Devon Böhmens besser dem Typus nnd zeichnen sich durch grosse Regelmässigkeit aus. So die Arten:

bohemicum Počta l. c. Pl. 18. Fig. 11.
neglectum Počta l. c. Pl. 18. Fig. 6.
subtile Počta, l. c. Pl. 19. Fig. 7. und auch
socium Počta l. c. Pl. 19. bis Fig. 12,

insbesondere aber

clarum Počta l. c. Pl. 18. Fig. 8.,

die für die regelmässigste der Gattung angesehen werden kann.

Die Kalkblätter verlaufen, im radialen Durchschnitte betrachtet, zu einander parallel und sind so verteilt, das auf 5 *mm* 20 bis 26 kommen. In meiner angeführten Arbeit aus dem J. 1894 ist eine andere Anzahl angegeben, welche hiemit corrigiert wird. Sie sind von verschiedener Dicke; sehr eng und scharf gezeichnet sind die unregelmässigen, welche gewöhnlich nicht parallel zu den nachbarlichen verlaufen, sondern, entweder 2 Kalkblätter mit einander verbinden, indem sie eine schräge Richtung einnehmen, oder aber im Bogen zu dem Kalkblatte zurück sich biegen, aus welchem sie hervorkammen (sieh die Tafel Fig. 2. und 3.).

Die gewöhnlichen geraden Blätter sind dicker und von nicht vollkommen scharfen Umrissen (sieh Fig. 3.) voraus sich schliessen lässt, dass ihre Oberfläche rauh war und darum bei der Fossilisation in den sie umgebenden Kalkspat allmählig überging.

Stellenweise ist ein, oder auch mehrere Interlaminarräume durch dünkleren Kalkspat erfüllt (sieh Fig. 3.), so dass an diesen Stellen die Struktur verwischt wird und die Pfeiler undeutlich werden, und die durch Pfeiler gebildeten Kammer (im radialen Durchschnitte) nur

durch kleine, meist unregelmässig runde Öffnungen angedeutet sind. In dieser Erscheinung könnte man vielleicht eine Verstärkung des Gerüstes durch reichlichere Zufuhr von (sekundärem?) Kalkspat erblicken; allerdings ist es aber auch möglich, dass sie durch Fossilisation hervorgebracht worden ist.

Die Pfeiler erscheinen im radialen Durchschnitte wie kurze, auf den Kalkblättern senkrecht stehende Lamellen, welche mit den Blättern durch knopfartige Verdickungen verbunden sind und entweder im Interlaminarraume enden, oder das nächste Kalkblatt erreichen und in dasselbe mit ähnlicher knopfartiger Verdickung übergehen (sieh Fig. 2.). Zuweilen verlängert sich der Pfeiler von dieser Verdickung noch auf die andere Seite des Kalkblattes mit einem sehr kurzen dornenartigen Fortsatz, aber niemals setzen die Pfeiler mehr als einen Interlaminarraum durch. Die Pfeiler, welche mit dem nachbarlichen Kalklblatte sich nicht verbinden, sondern frei in den Interlaminarraum hinein ragen, enden mit einer stumpfen Spitze und sind zuweilen auch abgestutzt.

Die Verteilung der Pfeiler ist eine derartige, dass auf 5 *mm* 15—25 Stück kommen. Auch in dieser Richtung ist die von mir im J. 1894 angegebene Anzahl zu korrigieren.

In tangentialen Durchschnitten kommen die Insertionen der Pfeiler auf den Kalkblättern gut zum Vorschein.

Der grösste Teil dieser Insertionen ist unregelmässig oval, rund oder verzogen; an ihrer Peripherie sind fadenförmige Ausläufer, die jedoch nicht verlängert, sondern im Gegenteil kurz sind (sieh Fig. 4.). Wurzelartige lange Ausläufer, welche mehrere benachbarte Insertionen der Pfeiler mit einander verbinden, sind bei anderen Stromatoporoiden bekannt. Sie werden von Nicholson auch bei *Clathrodictyon* und zwar bei der Art *regulare* l. c. Taf. XVIII Fig. 11a und auch *cellulosum* l. c. Fig. 2 im Texte pag. 43 angegeben. Die Abbildungen auf Nicholson's Tafeln sind den Bildern im Mikroskope nachgezeichnet, nicht photographisch reproduziert, so dass die Möglichkeit eines Irrtumes nicht ausgeschlossen ist. Es wurden vielleicht die zuweilen radiär sich stellenden Sprünge im krystallinischen Kalkspat für Ausläufer gehalten und so ein Merkmal angegeben, welches bei typischen Clathrodictyonarten nicht vorkommt. In unseren Dünnschliffen sind die Pfeiler immer selbstständig und durch stolonenartige Ausläufer mit einander nie verbunden.

Die Pfeiler sind gewöhnlich voll und ihre Querschnitte haben die Form von ovalen, auf der Peripherie zerfranzten dunklen Flecken

(sieh Fig. 4.). Sie sind in den tangentialen Durchschnitten so verteilt, dass auf 2□ *mm* 34 bis 45 kommen.

An einigen Stellen ist aber die Struktur der Pfeiler eine andere. In der Mitte der Masse der Pfeiler erscheinen im Querschnitte Kreise, welche andeuten, dass in den Pfeilern ein röhrenförmiger Kanal der Länge nach verläuft Diese Kreise sind zuweilen nur angedeutet, indem ihre Färbung sich wenig von der der übrigen Partien des Querschnittes abhebt (sieh Fig. 5.), zuweilen aber sehr deutlich entwickelt (sieh Fig. 6.). Die Stellen, wo diese Beschaffenheit der Pfeiler zu sehen ist, finden sich in tangentialen Durchschnitten nur sehr vereinzelnt; in den radialen Schnitten aber gehören die Spuren nach Kanälen in den Pfeilern zu den grössten Seltenheiten.

Die Verteilung dieser mit zentralen Kreisen versehenen Pfeilerquerschnitte ist eine derartige, dass auf 2□ *mm* 42 kommen.

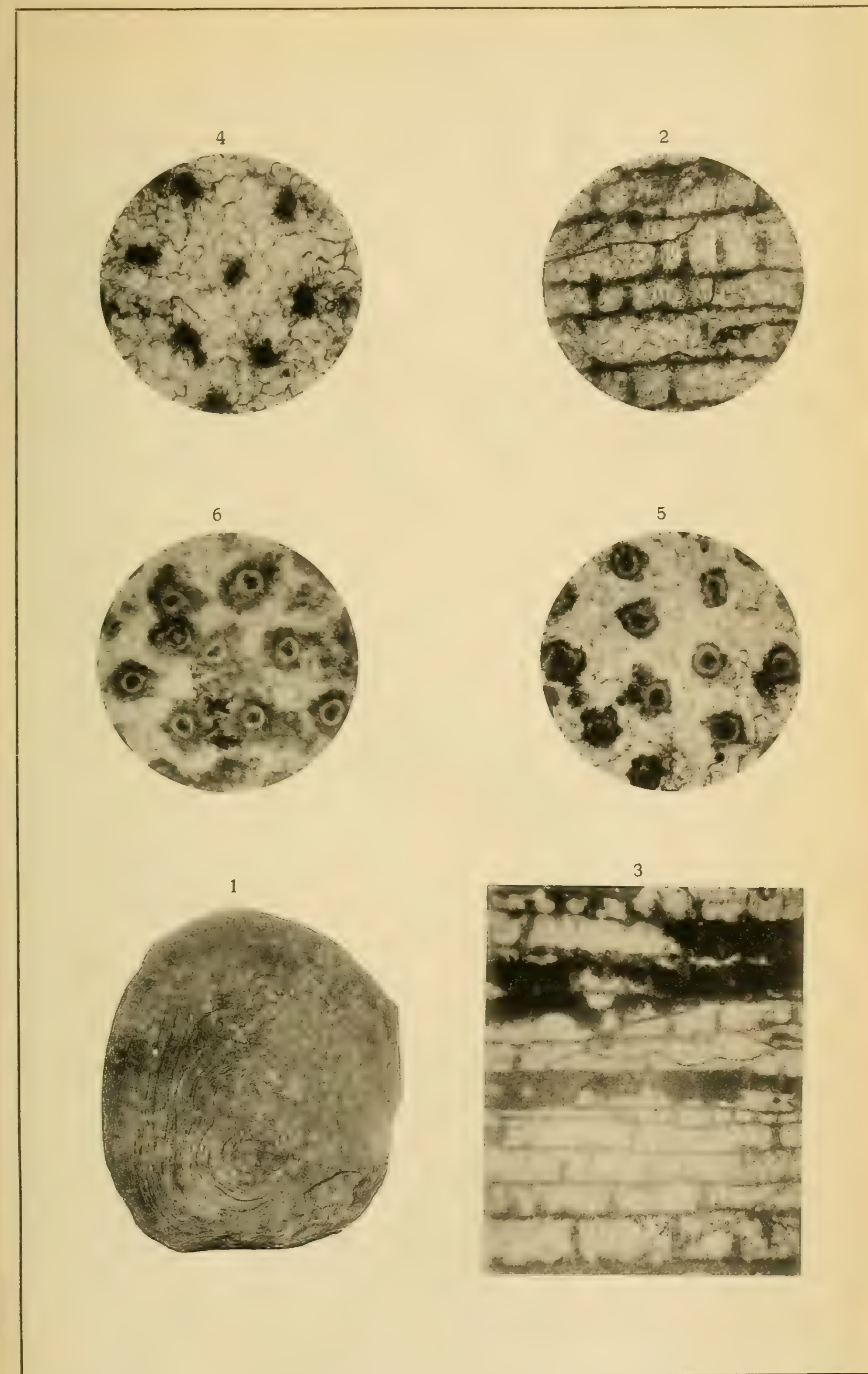
Längskanäle in den Pfeilern, kommen bei einigen stromatoporiden Gattungen vor, so z. Beisp. bei *Hermatostroma* und *Labechia*, wurden aber bei der Gatt. *Clathrodictyon* nicht beobachtet; nur aus der undeutlichen Abbildung bei Nicholson Taf. XIX. Fig. 2. der Art *Cl. fastigiatum* könnte man schliessen, dass sie bereits ihm vorlagen, von ihm aber als durch Verkieselung des Gerüstes hervorgebrachte Erscheinungen gedeutet wurden.

Tafelerklärung.

Fig. 1. Die Kolonie von der unteren Fläche, etwa $^1/_{10}$ natürl. Grösse.

Fig. 2. und 3. radiale Durchschnitte, 14 m. vergrössert; Kalkblätter und Pfeiler gut unterscheidbar.

4. Pfeilerquerschnitte 14 m. vergrössert. 5. und 6. Pfeilerquerschnitte mit zentralen Längskanälen, 14 m. vergrössert.



CARL BELLMANN IN PRAG.

XIII.

Modifikace methody ethylestherové k důkazu kokosového tuku v másle.

Podávají J. Hanuš a Ferd. Petřík.

(Předloženo v sezení dne 10. června 1910.)

Svého času jeden z nás[1]), v další práci pak společně s L. Šteklem[2]), navrhl rozpoznávati kokosový tuk v jiných tucích neb olejích na základě čísla ethylestherového, t. j. množství $cm^3 \frac{n}{10}$ KOH, jehož jest třeba ke zmýdelnění ethylestherů ve 100 cm^3 vodného destilátu po předchozím oddestilování alkoholu z 5 g tuku, v němž převedeny byly katalickým působením malého množství kalihydrátu v ethylalkoholickém prostředí triglyceridy mastných kyselin v mnohem těkavější ethylesthery těchto kyselin. Vyšetřili, že číslo ethylestherové kokosových tuků je nad 40 a as 3krát tak vysoké jako totéž číslo u másla, které pohybuje se mezi hodnotami 7·1—13·2; u tuků rostlinnych nepřekročuje však řečené číslo hodnotu 2, u živočišných (margarin, sádlo vepřové atd. vyjma rybí tuky, které nezkoušeny), může ono číslo dosáhnouti až hodnoty 3, což závisí jednak od způsobu přípravy, jednak od způsobu krmení atd. Dle zkoušek, které dále byly provedeny, zjistilo se, že v rostlinných olejích prozradí se okamžitě již 1%ní přísada tuku kokosového tím, že číslo ethylestherové značně stoupne, u vepřového sádla a margarinu pak 2% (naprosto jistě pak 5%) kokosového tuku, v másle však s bezpečnou jistotou teprve 15%.

---

[1]) Zeit. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1907. 13, 18.

[2]) Král. čes. spol. náuk VIII. 1908 (předloženo v březnu, dissertační práce Dr. L. Štekla).

V literatuře běžné, vyjma referáty nacházíme o této metodě zmínku v práci C. Paala a C. Ambergera[3]) kteří tuto „krátce před tím uveřejněnou pěknou methodu“ kladou za vhodný příklad pro svoji ze zkušenosti plynoucí předpověď, že nebude nalezen kvantitativní způsob, jenž sám o sobě, bez ohledu na ostatní konstanty tuku, by mohl sloužiti za důkaz pro bezpečné poznání nepatrného množství kokosového tuku v másle. Pokud až toto tvrzení jest platné, bude v této práci ukázáno.

Prakticky metody této s úspěchem použil M. Fritsche[4]) k řešení otázky o složení tuku máselného, krmí-li se krávy kokosovými pokrutinami, o čemž vsak ještě níže se zmíníme.

Methoda ethylestherová, stojící na správném základu, že totiž v kokosovém tuku nachází se více mastných kyselin obtížněji těkajících případně na rozhraní těkavosti stojících (kyseliny o 10—12 atomech uhlíku, kaprinová, laurová) než-li v máselném tuku, mohla by však, kdyby se podařilo přiměřeně ji zmodifikovati vésti k tomu, že by se dalo dokázati i 10% kokosového tuku v másle za různých okolností, čímž by výrok Paalův a Ambergerův byl značně oslaben. K oprávněnosti této naděje přispívá, že i s jiné strany v práci později vyšlé, ethylestherů použito bylo k vyšetření kokosového tuku v másle.

J. Fendler[5]) rovněž parcielně zmýdelňuje roztok tuku v petrolejovém etheru alkoholickým draslem; získané ethylesthery proprané a alkoholu zbavené destiluje po způsobu určování frakcí v petroleji a jímá část těkající mezi 200—300° (tedy kaprylan, kaprinan, lauran, myristan ethylnatý) do válečku děleného na $^1/_{10}$ *cm*³ a určí její objem. Číslo takto nalezené nazývá se pak číslem destilátovým; shledal, že se toto pohybuje u másla v mezích hodnot 2·5—6·1 u kokosového tuku mezi 37—42. Aby však čísla tato vyšetřil, potřebuje destilovati *50 g* alkoholisovaného tuku připraveného z *85 g* tuku původního.

Povzbuzeni všemi těmito okolnostmi, hleděli jsme tak přeměniti postup práce pro stanovení čísla ethylestherového, aby z výsledků dalo se přesně souditi na 10%ní případně menší ještě přísadu tuku kokosového v másle.

Od r. 1907, kdy podáno byla jedním z nás předběžné sdělení o nové methodě, kterak lze dokázati kokosový tuk v jiných tucích,

---

[3]) Zeitschr. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1909. 17, 4.

[4]) Zeitschr. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1909. 17, 535.

[5]) Arb. aus d. Ph. Inst. d. Univ. Berlin 1908. 5, 261 dle ref. v chem. Revue über d. Fett. u. Harz Ind. 1908. 15, 258 říjen.

vyšla velká řada prací obírajících se řešením téže otázky a užito bylo k účelu tomu skoro všech vlastností fysikálních i chemických jak tuku kokosového, tak i těch, které jsou jím porušovány. Uváděti všechny tyto methody, vedlo by příliš daleko; vysvítá však z jich počtu veliký zájem o dobrou, rychlou a spolehlivou methodu, dle níž by se rozpoznalo malé množství tuku kokosového v másle.

Jelikož stanovení čísla ethylestherového není pracné, nákladné ani zdlouhavé, zdálo se nám, že by mohlo předčiti všechny methody k témuž cíli navržené a to tenkráte kdyby se podařilo s ohledem na kyseliny mastné od C_{10} do C_{14} buď zveličiti nápadné rozpětí mezi číslem ethylestherovým másla a kokosového tuku totiž jinak řečeno, kdyby se dostalo do destilátu dostatečně velké množství ethylestherů těch kyselin, které jsou podstatou tuku kokosového anebo dosíci jisté konstantnosti čísla ethylestherového u másla. K dosáhnutí tohoto cíle užito dvou cest:

1. tak zvaného obohacovacího způsobu Arnoldova*) založeného na relativně snadné rozpustnosti kokosového tuku v alkoholu a stanovení konstant podílu v alkoholu rozpuštěného,

2. získati více destilátu jedno- nebo dvojnásobnou destilací.

Z výzkumů Arnoldových plyne, že při obohacovacím způsobu v alkoholu rozpustná část (alkoholická část) tuků zvířecích obsahuje esthery snadno těkavých mastných kyselin, volné kyseliny, olein a nezmýdelnitelné látky. Číslo Reichert-Meisslovo, Wauters-Polenského a jodové bylo vyšší nežli u tuku původního. Vzhledem k tomu, že ethylesthery jsou těkavější, lze předvídati, že toto obohacení u tuku máselného bude míti značný vliv na množství ethylestherů v destilátu lihovém, malý však pro destilát vodní; u kokosového tuku, kde kvantitativné poměry kyselin jsou obrácené, budou rovněž i v tomto ohledu poměry pro oba destiláty opačné. Postup práce volen tak, jak jej Arnold podává.

Princip:

Tuk vyváří se 96% alkoholem a získá se část, která v alkoholu zbude ochlazením na obyčejnou teplotu. Do baňky as 2 *l* odváží se 150 *g* tuku, přidá se 1100 cm^3 96% alkoholu, několik kousků pemzy a zahřívá se se zpětným chladičem na vodní lázni za mírného varu a občasného protřepání asi 1 hodinu; po 24 hodinách odfiltrujeme alkoholický roztok tukový od nerozpuštěného tuku a po přidání několika kousků pemzy, oddestiluje se alkohol. Posledního zbytku alkoholu

*) Zeit. f. Untrs. d. Nahr- u. Genussmittel 1907. 14. 147 (tamtéž přísl. literatura).

a vody zbaví se zahříváním v misce na vodní lázni do varu zahřáté po 1 hodinu. Takto získaný alkoholický extrakt tuku se sfiltruje a užije ke stanovení čísla ethylestherového. Alkoholický extrakt u másla obnášel as 9% použitého tuku, byl světle žluté barvy, konsistence o něco tužší než původní máslo; u kokosového tuku činil as 12% použitého, byl barvy bílé a mnohem tvrdší než u másla. Postřehli jsme však, když byl extrakt zbavován posledního zbytku alkoholu, zápach po estherech a kyselinách, takže tu není vyloučena ztráta na těchto součástech tuku. Číslo ethylestherové stanoveno takto: do Erlenmeyerovy baňky odváženo 5 *g* sfiltrovaného extraktu alkoholického, v thermostatu zahříváno po $^1/_4$ hod. na 50° C pak rychle přidáno 30 cm^3 $\frac{n}{10}$ alkoholického louhu draselnatého a třepáno až se roztok úplně vyjasnil. Po té postaveno ještě na deset minut do thermostatu, aby roztok nabyl 50° C a přidáno na to přesně tolik kyseliny sírové (as 2 cm^3) kolik třeba k neutralisaci použitého louhu, zředěno 113 cm^3 vody destilované, aby celkový objem mimo objem tuku činil 145 cm^3 a za přidání několika kousků pemzy destilováno z lázně Roseova kovu; prvá část — destilát alkoholický, činící 30 cm^3 — jímána zvlášť, načež vodní destilát zachycován do 100 cm^3. Jednotlivé takto získané destiláty rozpuštěny v alkoholu a zmýdelněny. Zmýdelňuje se po otupení přešlých volných kyselin přebytkem $\frac{n}{5}$ alkoholického louhu draselnatého (užito pro frakce z másla vždy 20 cm^3, pro frakce z ceresu 40 cm^3 $\frac{n}{5}$ KOH) na vodní lazní za použití zpětného chladiče mírným varem po $^3/_4$ hodiny. Po vychladnutí titruje se zpět $\frac{n}{10}$ kyselinou solnou a počet cm^3 k titraci potřebné kyseliny odečte se od dvojnásobného množství použitého $\frac{n}{5}$ alkoholického louhu draselnatého. Tím dostane se počet cm^3 $\frac{n}{10}$ louhu draselnatého potřebný ke zmýdelnění přešlých estherů čili číslo ethylestherové. Tímto způsobem nalezena tato čísla u másla:

Původní máslo			Podíl v alkoholu 96%ním			
			nerozpustný		rozpustný	
Vzorek	lihový dest.	vodný dest.	lihový dest.	vodný dest.	lihový dest.	vodný dest.
1	27·6	13·5	23·9	13·3	42·2	14·1
2	24·9	12·4	22·2	10·7	46·3	16·0
3	25·4	12·9	22·8	12·1	38·4	14·2
4	27·7	13·5	21·2	12·2	50·2	14·4
5	21·6	13·7	23·4	13·1	50·6	15·0
6	22·0	13·0	22·5	11·2	47·6	14·0
7	20·9	9·3	21·0	9·6	40·0	13·6

Původní tuk kokosový (ceres)			Podíl v alkoholu			
			nerozpustný		rozpustný	
Vzorek	lihový dest.	vodný dest.	lihový dest.	vodný dest.	lihový dest.	vodný dest.
1	12·8	43·0	12·5	40·1	19·2	55·0
2	12·5	44·5	11·8	42·3	20·1	54·1

Číslo ethylestherové rozpustného podílu v alkoholu u másla stouplo jen nepatrně proti původnímu tuku, za to v alkoholickém destilátu objevila se velká část estherů. Spotřeba cm^3 $\frac{n}{10}$ louhu draselnatého k jich zmýdelnění je skoro dvakrát tak vysoká jako u tuku máselného původního. V nerozpustném podílu za to číslo ethylestherové kleslo poněkud a líhový destilát spotřeboval ke zmýdelnění skorem totéž množství $\frac{n}{10}$ KOH jako tuk výchozí. U kokosového tuku nalezeny poměry obdobné; i tu část rozpustná velice se liší od nerozpustné. Číslo ethylestherové sice stouplo však jen o 10—15 jednotek, z čehož možno souditi na menší kvantitativní rozdíly ve složkách kokosového tuku proti máselnému, jevící se jak v jich rozpustnosti tak i těkavosti; kdežto oba podíly nerozpustný i rozpustný u másla kvantitativně jsou velice různé (dvojnásobné množství snadno těkavých kyselin v jednom proti druhému) není tomu tak u tuku

kokosového. Jakkoliv tyto výsledky jsou velmi zajímavé theoreticky, upustili jsme od dalšího sledování celé otázky a to jednak proto, že u kokosového tuku nedocíleno obohacení tak vysokého, aby rozpětí mezi čísly ethylestherovými alkoholického podílu másla a tuku kokosového bylo mnohem značnější než u tuků výchozích, jednak, že operace sama jest nákladná, vyžadující velké množství alkoholu, výchozího tuku, značně času, a nevyhovujíc při tom v leckterém ohledu podmínkám kvantitativním. Mimo to však nebylo by lze vzhledem k nepatrnému podílu v alkoholu rozpustné části u kokosového tuku očekávati, že by se dokázalo malé množství pod 10% jdoucí kokosového tuku bezpečně v másle. I přikročeno k druhé cestě, zkusiti, zda, přežene-li se větší množství kapaliny, nedospěje se ke konstantnějším výsledkům a zvlášť nápadným rozdílům.

Poněvadž ve vodním destilátu kokosového tuku jest, jak Hanuš a Štekl dokázali kaprylové kyseliny kol 40%, laurové as též tolik*) u másla však kaprylové kol 50% a laurové jen kol 15% a poněvadž ethylesther laurové kyseliny a myristové jest netěkavější, může se očekávati, že u kokosového tuku, přežene-li se oněch 100 cm^3, bude v dalším destillátu obsaženo ještě značnější množství ethylestherů s vodní parou přecházejících, nežli za těchže okolností u másla. Tomu nasvědčuje ostatně též to, že těkavé kyseliny v másle jsouce nižší molekulárné váhy snadněji přecházejí za týchž podmínek než kyseliny kokosového tuku. Tak do destillátu dle způsobu Reichert-Meisslova přechází dle Jensena 85—88% kyseliny máselné, 85—100% kapronové a 24—25% kaprylové kyseliny; přidá-li se po této destilaci 110 cm^3 vody a znova se 110 cm^3 oddestiluje přechází do tohoto destillátu dle R. K. Donse malé množství máselné a kapronové kyseliny ale asi 30% kaprylové kyseliny zbylé po první destilaci. Dále může se očekávati, že nebude ethylestherové číslo dalšího podílu kolísati v tak širokých mezích.

Na základě prvého předpokladu lze souditi, že číslo ethylestherové stoupne, přežene-li se více jak 100 cm^3, běží jen o to, docílí-li se tím většího rozpětí mezi čísly obou tuků. I seznali jsme, že jest nejlépe pro stoupnutí čísla ethylestherového u kokosového tuku

*) Viz v tom ohledu též práci Paulmeyerovu (Chem. Ztg. Rep. 31. 333, 1907), který podrobil frakční destilaci uvolněné mastné kyseliny z kokosového tuku a nalezl, že celkem se v nich nachází 0·5% kyselin do C_8, kol 20% kys. kaprinové a 40% kys. laurové vedle 24% kys. myristové, kol 10% kys. palmitové a kol 5% kys. olejové. Jeví se tedy neshoda pouze v množstvích kyseliny kaprylové a kaprinové.

proti číslu ethylestherovému u másla, oddestilovati poprvé 150 cm^3 místo 100 cm^3 dle tohoto postupu: Do Erlenmeyerovky odváží se 5 *g* filtrovaného tuku a esterifikuje se způsobem výše vypsaným. Po té se kapalina přesně otupí 2 cm^3 H_2SO_4, odpovídajících 30 cm^3 $\frac{n}{10}$ alkoh. KOH (jest výhodnější přidati nepatrný přebytek H_2SO_4 v desetinách cm^3, jelikož pak kapalina při destilaci nepění). Zředí se na 195 cm^3 totiž se 163 cm^3 destilované vody a destiluje se za přidání několika kousků pemzy z lázně Roseova kovu. Jímá se zvlášť prvních 30 cm^3 destilátu lihového, (který musí přejíti během 10 minut, počítáno od doby kdy první kapka padne do jímadla) a pak se přežene 150 cm^3 během 40—45 minut. Pokus nutno zaříditi tak, aby kapka doplňující oněch 150 cm^3 byla zároveň poslední kapkou přešlou. Na to stanovíme číslo ethylestherové těchto 150 cm^3 způsobem na str. 4. vypsaným.

	Číslo ethylesterové		Přírůstek
	pro 100 cm^3	pro 150 cm^3	
Kokosový tuk	40·0	60·0	+ 20·0
Máslo	10·0	13·6	+ 3·6

Stouplo tedy číslo ethylesterové u kokosového tuku o polovici, kdežto u másla as o $^1/_3$. Rozpětí činící 46 jednotek jest tak značné, že kdyby tato čísla ethylestherová másla příliš nekolísala, mohlo by se dokázati spolehlivě 10% kokosového tuku v másle. Na př.: Směs másla o čísle 14 s 10% kokosového tuku by vykazovala číslo 18·6. Abychom se však dále přesvědčili jaké množství estherů u obou tuků dá se ještě přehnati po oddestilování těchto prvých 100 cm^3 postupovali jsme s destilací dále tím, že přidali jsme do baňky vždy po 100 cm^3 vody a přeháněli potud, až destilát spotřeboval jen nepatrné množství $\frac{n}{10}$ KOH ke zmýdelnění. K tomu cíli užito baňky Erlenmeyerovy, do jejíž hrdla zapadá kaučuková dvojvrtaná zátka; jedním otvorem prochází dělicí nálevka, jímající, as 110 cm^3 a opatřená skleněným kohoutem, druhým trubice s kulovitým násadcem spojující baňku s chladičem. Do dělicí nálevky odměří se přesně 100 cm^3 vody a po ukončené jedné destilaci a částečném ochlazení vpustí se do baňky z nálevky dalších 100 cm^3 vody a v destilaci se pokračuje. Zařízením tímto vy-

loučena ztráta jakákoliv na estherech. Každá takto získaná frakce zvlášť zmýdelňována po neutralisaci v ní obsažených volných kyselin a určeno pro ni číslo ethylestherové. Obraz této destilace přerušované jest tento:

Oddestilované množství	ke zmydelnění estherů potřeb. cm^3 n/10 KOH	k neutralisaci volných kyselin cm^3 n/10 KOH
I. 30 cm^3 (lihový dest.)	27·4	1·1
II. 150 cm^3 (vodný „	13·4	2·6
III. 100 cm^3 „ „	6·6	1·1
IV. 100 cm^3 „ „	4·4	0·5
V. 100 cm^3 „ „	3·9	0·3
VI. 100 cm^3 „ „	3·1	0·2
VII. 100 cm^3 „ „	2·7	0·2
VIII. 100 cm^3 „ „	2·3	0·3
IX. 100 cm^3 „ „	2·0	0·2
X. 100 cm^3 „ „	1·8	0·1
980 cm^3 celkem .	67·6	6·6

Pro kokosový tuk

Oddestilované množství	ke zmýdelnění estherů potřeb. cm^3 n/10 KOH	k neutralisaci volných kyselin cm^3 n/10 KOH
I. 30 cm^3 (lihový dest.)	16·4	1·1
II. 150 cm^3 (vod. „	60·0	5·0
III. 100 cm^3 „ „	25·9	2·5
IV. 100 cm^3 „ „	21·3	2·1
V. 100 cm^3 „ „	16·3	1·8
VI. 100 cm^3 „ „	11·6	1·0
VII. 100 cm^3 „ „	8·8	1·0
VIII. 100 cm^3 „ „	7·6	0·8
IX. 100 cm^3 „ „	6·7	0·6
X. 100 cm^3 „ „	5·5	0·6
XI. 100 cm^3 „ „	4·6	0·5
XII. 100 cm^3 „ „	3·0	0·4
1180 cm^3 celkem . .	187·7	17·4

Tedy celkem spotřebováno u másla kol 70 cm^3 $\frac{n}{10}$ KOH u kokosového tuku kol 190 cm^3 na zmýdelnění estherů. Kdežto však další frakce másla, pátou počínaje, vykazují již malou spotřebu $\frac{n}{10}$ KOH, spotřebuje se u kokosového tuku teprve asi pro devátou frakci totéž množství $\frac{n}{10}$ KOH jako pro třetí frakci másla. Z toho plyne, jestli by se přibraly další tyto frakce, že by rozdíl v číslech ethylestherových u obou tuků byl ještě větší.

Rozdíl tento činí, přihlíží-li se pouze ke II. a III. destilátu 85·9—20 = 65·9.

Jak viděti jsou rozdíly ty značné; i jest oprávněná naděje, že se touto cestou najde docela spolehlivě 10%ní přísada kokosového tuku v másle, ne-li ještě menší. Poněvadž ale běží víc o metodu rychlou, stačí patrně, ukončí-li se destilace po III. frakci, či-li oddestiluje-li se 30 cm^3 alkoholické části pak 150 cm^3 vodné části a pak dalších 100 cm^3, což jak z další práce vyplývá, vede k uspokojujícímu výsledku. Ostatně touto trojí destilací dostane se dle výše uvedené tabulky asi $^5/_7$ estherů, jež lze přehnati.

K vůli jednoduchosti nazývejme množství cm^3 $\frac{n}{10}$ alkoholického louhu draselnatého spotřebovaného na zmýdelnění 150 cm^3 I. číslo ethylestherové, pro 100 cm^3 II. číslo ethylestherové a součet obou čísel čili počet cm^3 spotřebovaný na zmýdelnění 250 cm^3 destilátu vodného zkrátka součtem.

Jest pak jednou z hlavních podmínek pro upotřebitelnost této methody vyzkoušeti, do jaké míry kolísá součet čísel ethylestherových u másel různého původu. Dle dosavadních zkušeností, že těkavější esthery resp. kyseliny nacházejí se v lihovém destilátu, s kterým se nepočítá, lze souditi, že rozpětí toto pro krajní hodnoty nebude značné. Výsledky pro zaručeně pravá másla snešeny jsou v této tabulce.

Číslo vzorku	I. čís. ethyl-esther-ové	II. čís. ethyl-esther-ové	Součet	Číslo vzorku	I. čís. ethyl-esther-ové	II. čís. ethyl-esther-ové	Součet
1	15·9	4·1	20·0	28	12·9	7·9	20·8
2	13·6	6·4	20·0	29	13·8	7·4	21·2
3	13·3	6·7	20·0	30	14·4	6·3	20·7
4	12·8	7·3	20·1	31	18·2	4·8	23·0
5	15·0	6·6	21·6	32	13·2	7·9	21·1
6	14·6	6·3	20·9	33	13·0	7·0	20·0
7	14·3	5·8	20·1	34	14·2	5·8	20·0
8	13·0	7·0	20·0	35	14·2	6·8	21·0
9	12·6	7·4	20·0	36	13·2	6·7	19·9
10	14·0	7·1	21·1	37	15·8	6·8	22·6
11	14·6	6·3	20·9	38	14·2	5·8	20·0
12	14·4	7·1	21·5	39	15·4	4·9	20·3
13	11·5	9·3	20·8	40	16·4	6·6	23·0
14	13·0	8·1	21·1	41	13·4	6·6	20·0
15	12·5	7·6	20·1	42	13·4	5·9	19·3
16	12·8	8·2	21·0	43	14·0	6·8	20·8
17	13·8	7·6	21·4	44	13·4	6·6	20·0
18	13·7	7·5	21·2	45	12·8	6·4	19·2
19	14·1	7·3	21·4	46	12·0	6·8	18·8
20	15·5	6·1	21·6	47	12·4	6·6	19·0
21	14·1	7·3	21·4	48	13·0	6·8	19·8
22	14·7	6·8	21·5	49	12·9	6·0	18·9
23	13·7	6·4	20·1	50	12·0	7·0	19·0
24	14·0	6·7	20·7	51*)	15·40	6·95	22·35
25	14·7	6·7	21·4	52*)	15·90	6·60	22·50
26	16·0	6·8	22·8	53*)	14·60	5·45	20·05
27	15·0	6·5	21·5				

Připadají tedy na čísla pod 19 dva vzorky čili 4%, mezi 19—20 6 vzorků čili 11·3%, mezi 20—21 26 vzorků čili 4·9%, mezi 21—22 13 vzorků čili 24·5%, mezi 22—23 6 vzorků čili 11·2%. Má tedy největší počet másel součet konstantní kolísající mezi 19—22 (88%) a jen několik málo výsledků jest pod neb nad těmito hodnotami.

---

*) Tyto tři vzorky provedeny po roce p. Jar. Thianem.

Tedy touto druhou destillací se nápadné rozdíly čísel prvou destilací získaných dosti vyrovnávají. Prvých 40 vzorků másla bylo zkoušeno na podzim a v zimě r. 1907 a 1908 a pocházelo od krav, které silně byly přikrmovány řepou krmnou, chrástem a hlavami řepními, později též řízky cukrovarskými; dalších 10 pak zkoušeno na jaře r. 1908, kdy krmeno bylo hlavně krmivem zeleným a poslední 3 na jaře r. 1909. Ze starších prací Sjollema, Swavinga a novějších Siegfelda [7]) H. Lühriga a A. Hepnera, [8]) Ambergra [9]) plyne, že přikrmování chrástem řepným neb řepou krmnou má vliv na složení tuku máselného, jevící se hlavně ve větším množství těkavých kyselin; nejenom Reichert-Meisslovo číslo takového másla jest vyšší ale i číslo Wauters-Polenskeho značně stoupne tak, že v případě tom jest Polenskeho metoda již nespolehlivá. V našem případu součet čísel ethylestherových za přikrmování chrástem pohyboval se kol 20, při jiném krmivu mezi 18·8—21·0, tak že diference tu valné nejsou a to proto, že odstraněna větší část kyselin, kapronové a kaprylové v líhovém destilátu, z nichž právě poslední u Polenskeho čísla vyvolává ono stoupnutí; i jest tedy naděje, že i za těchto okolností metoda ethylestherová úplně vyhoví účelu svému. Výrok tento podpíráme též pokusy Fritscheovými [10]) při dokončování této práce právě uveřejněnými. Fritsche zkoušel význam jednotlivých method (Polenskeho, čísla Reichert-Meisslova, zmýdelnění, střední mol. veličinu netěkavých kyselin, Ave-Lallemantovu barytovou hodnotu, Pastrnakovu differenci, Paal-Ambergrovo kadmiové číslo, a Hanuš-Šteklovo číslo ethylestherové) pro másla krav krmených řepným chrástem a shledal, že krmivo toto nemá vlivu na bod tání a tuhnutí a mimo to pouze jen ještě na 2 hodnoty a to Ave-Lallemantovou barytovou hodnotu a číslo ethylestherové. Píše: „Hlavní podíl estherů z másla získaného, krmí-li se chrástem, nenachází se jako u kokosového tuku ve vodném nýbrž v alkoholickém destilátu; odtud proč nejeví se žádný vliv při tomto způsobu krmení. Množství kyseliny laurové takovéhoto tuku máselného rovná se množství této kyseliny v kterémkoli jiném tuku. V Ave-Lallemantově barytové hodnotě, zvláště v Hanuš-Šteklově ethylestherovém čísle máme hod-

[7]) Zeitschr. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1907, 13, 513.
Zeit. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1909, 17, 177.
Chem. Ztg. 1907. 31, 511.

[8]) Zeit. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1909, 17, 135.

[9]) Zeit. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1907, 13, 614.

[10]) Zeit. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1909, 17. 535.

noty, dle kterých se pozná, jedná-li se o máslo změněné řepným chrástem aneb kokosovým tukem."

Jestli-že tedy toto jednoduché číslo ethylestherové vykoná tak dobré služby, tím spíše možno totéž očekávati u součtu čísel ethylestherových. Zbývá jen dokázati účinek píce, obsahující kokosové výtlačky. Pro nedostatek a obtížné zaopatření vhodného materiálu nemohla tato otázka býti řešena.

Zajímavo jest též studovati, jak působí žluknutí na číslo ethylestherové.

Měli jsme vzorek másla velice starého silně již rozloženého, kteréž zdestillováno po alkoholyse dalo tato čísla: I. vodný destillát 6·5, druhý vodný destillát 1·95, součet čísel ethylestherových tudíž 8·45. Lze tedy předpokládati, že se stoupajícím stupněm žluklosti budou klesati hodnoty pro číslo ethylestherové, za to však spotřebuje se více alkali k neutralisaci volných kyselin v jednotlivých destillátech.

Dále provedeny destilace u tuků kokosových a nalezena čísla sestavena ve připojené tabulce:

Číslo vzorku	I. č. ethyl-esth.	II.č.ethyl-esth.	Součet	Číslo vzorku	I. č. ethyl-esth.	II.č. ethyl-esth.	Součet
1	60·0	26·3	86·3	6	54·7	24·1	78 8
2	55·5	26·6	82·1	7	60·2	24·7	84·9
3	58·0	26·1	84·1	8	60·0	27·3	87·2
4	60·0	25·9	85·9	9	57·1	25·2	82·3
5	60·0	27·0	87·0				

Součet obou čísel jest tedy kol 80 a tudíž skoro 4krát tak velký jako je součet obou čísel u másla. I dalo by se, béřeme-li nejnižší hodnotu pro součet obou čísel ethylestherových u másla 18 a u kokosových tuků 80, zjistiti jestě 9% kokosového tuku v másle, neboť komposici takovéto příslušelo by číslo dle výpočtu větší než 23 nacházející se tedy nad nejvyšším číslem u másla pozorovaným. Abychom prakticky vyšetřili, jak stoupá toto číslo u másla porušeného kokosovým tukem, upravili jsme směsi o různém množství kokosového tuku k jíchž přípravě volili jsme másla s nízkým poměrně součtem. Kokosový tuk, jímž máslo pomíseno měl I. číslo E 58·0, II. číslo E 24·3, součet 82·3.

Nalezeny tyto výsledky:

	I. č. E	II. č. E.	součet	vypočteno pro součet
I. směs:				
máslo původní	13·4	5·9	19 3	—
máslo + 5% ceresu	16 8	6·4	23·2	22·3
máslo + 10% ceresu	19 2	7·8	27·0	25·4
II. směs:				
máslo původní	14·0	6·8	20·8	—
máslo + 5% ceresu	16·7	7·0	23·7	23 8
máslo + 10% ceresu	19·8	8·6	26·6	26·7
III. směs:				
máslo původní	13·4	6·6	20·0	—
máslo + 2% ceresu	14·4	6·9	21·3	21·2
máslo + 5% ceresu	15·8	8·2	24·0	23·0
máslo + 10% ceresu	17·7	9·6	27·3	26·0
máslo + 15% ceresu	20·8	9·8	30·6	30 0
IV. směs:				
máslo původní	12·0	6·8	18·8	—
máslo + 5% ceresu	16·0	7·5	23·5	21·8
máslo + 10% ceresu	18·0	8·9	26·9	24·9

V. směs upravena z másla č. 53. s 10·99% kokosového tuku se součtem 71. Nalezeno I. číslo 17·65, II. číslo 9·7 součet 27·35 (vypočten 25·5).

Dle těchto pokusů, béře-li se za krajní hodnotu součtu číslo 23, pozná se ještě 5% kokosového tuku v másle i v tom případu, kdy původní másla měla nejnižší součet ethylestherových čísel; ale o takováto malá množství v praksi se jednati nebude, jelikož by se porušení tak nepatrné nevyplácelo. Porušení však 10%ní, s kterým již nutno počítati, se součtem čísel ethylestherových odhalí bezpečně i tenkráte, kdyby bylo nutno spodní hraničné číslo snížiti a hořejší zvýšiti. Způsob tento má však ještě jinou výhodu před ostatními, zvláště před číslem Reichert-Meisslovým atd., že totiž nikterak se nemění, konservují-li se tuky těkavými kyselými konservovadly jako kyselinou benzovou, salicylovou atd. Tyto kyseliny působí sice na

číslo Reichert-Meisslovo zvyšujíce je, jak pozorovali Bemelmans[11]) Grimaldi [12]) (dle něhož přísadou většího množství kyseliny benzové lze upraviti z másla, oleomargarinu a kokosového tuku směs rovnající se v čísle Reichert-Meisslově dobrému máslu) nemohou však míti vůbec vlivu na číslo ethylestherové, jelikož před zmýdelněním se destilát nejprve do neutrality fenolftaleinové stitruje. Mohou se prozraditi tedy tato konservovadla při neutralisaci větší spotřebou titrovaného louhu.

Pokusy následující správnost tohoto předpokladu potvrzují. Máslo čís. 51 smíšeno s kyselinou salicylovou; obsahovalo jí 0·9%. Směs tato dala: lihový destillát s číslem 25·00 (proti 22·35), I. číslo ethylestherového 14·60, II. číslo E 8·30; součet 22·9 (proti 22·33); k témuž máslu přidáno 3% kyseliny benzoové; i nalezeno I. číslo E 12·8 II. 6·95 celkem 19·75. V tomto případu však prvý vodný destillát vyžadoval k neutralisaci 6·4 cm^3 $\frac{n}{10}$ KOH, druhý 3·00 cm^3 $\frac{n}{10}$ KOH.

Podobně tato methoda neselže i tenkráte, kdy máslo porušené tukem s číslem Reichert-Meisslovým nepatrným neb nízkým (oleomargarinem) uvedeno bylo přísadou triacetinu $C_3H_5O_3$ $(C_2H_3O)_3$, na normálné číslo těkavých kyselin dobrého másla; na možnost tohoto porušení poukázal H. Fincke [13]). Octan ethylnatý, který vznikne při stanovení čísla ethylestherového záměnou alkoholů, octne se v destillátu lihovém a do vodného destilátu by se mohly na nejvýše stopy dostati. Ostatně se prozradí tento esther ihned svou odlišnou vůní; úprava tato se dokáže, zmýdelní-li se destillát lihový; spotřebuje se více cm^3 $\frac{n}{10}$ KOH nežli u másla neupraveného, kde se pohybuje v mezích od 20·0—28·1.

K tomu podáváme tyto číselné doklady: A) máslo čís. 52, jehož destillát spotřeboval ke zmýdelnění etherů 20·3 cm^3 $\frac{n}{10}$ KOH, pomíseno bylo 15% technického tributyrinu, směs tato za alkoholyse dala lihový destillát s číslem **56·15**, I. číslo E 15·15 (acidita 7.3 cm^3 $\frac{n}{10}$ KOH), II. číslo E 4·4 tedy součet čísel E 19·55 proti 22·5 másla původního; B) k máslu, jehož lihová frakce vyžadovala 24 cm^3 $\frac{n}{10}$

[11]) Zeit. f. Untersch. d. Nahr- u. Genussmittel 1907. 13, 492.
[12]) Chem. Ztg. 1908, 32, 699 a 794.
[13]) Zeit. f. Untersch. d. Nahr- u. Genussmitel 1908. 16. 666.

KOH a I. číslo *E* mělo 12·2, druhé pak 5·25 a součet tedy 17·45. přidáno bylo 17% technického triacetinu; směs tato poskytla tyto výsledky: lihový destillát 57·25, I. číslo *E* 11·80, druhé číslo *E* 6·9, součet 18·70.

Součet čísel ethylestherových jest tedy spolehlivým kriteriem ku posouzení, je-li máslo porušeno kokosovým tukem.

Část II.

Kokosový tuk, zvláště však kokosové náhražky másla obsahují leckdy cizí tuky případně minerální oleje (viz Arnold[14]) Dafert a K. Kornauth[15]) atd.); jest na snadě otázku nyní obrátiti, a ptáti se jaké množství cizího tuku v kokosovém tuku se ještě pozná z čísla ethylestherového. Jak z předu podotknuto nepřesahují čísla ethylestherová (pro 100 cm^3 destillátu) u zvířecích a rostlinných tuků hodnotu 3; pro minerální oleje je ovšem 0. Upraveny tedy komposice ceresu s oleji: bavlníkovým, olivovým, sezamovým a podzemnicovým a stanovena obě čísla ethylesterová i součet jich předchozí metodou a výsledky sestaveny do této tabulky.

Tabulka ceresu porušeného rostlinnými oleji.

		Ceres	Ceres + 5% bavlníkového	Rozdíl od původního	Ceres +10% bavlníkového	Rozdíl od původního
I. číslo *E*	1	60·2	54·7	5·5	43·0	17·2
	2	60·0	47·7	12·3	40·6	19·4
II. číslo *E*	1	24·7	22·1	2·6	19·2	5·5
	2	27·2	22·1	5·1	20·2	7·0
Součet	1	**84·9**	**76·8**	**8·1**	**62·2**	**22·7**
	2	**87·2**	**69·8**	**17·4**	**60·8**	**26·4**

	Ceres	Ceres + 5% o. sezamového	Rozdíl od původního	Ceres + 10% o. sezamového	Rozdíl od původního	Ceres + 15% o. sezamového	Rozdíl od původního
I. číslo *E*	57·1	50·8	6·3	43·8	13·3	40·0	17·1
II. číslo *E*	25·2	19·3	5·9	19·2	6·0	21·2	4·0
Součet	**82·3**	**70·1**	**12·2**	**63·0**	**19·3**	**61·2**	**21·1**

[14]) Zeit. f. Unters. d. Nahr- u. Genussmittel 1908. 15, 280.
[15]) Chem. Ztg. 1909. str. 760.

	Ceres	Ceres + 5% olivového	Rozdíl od původního	Ceres + 10% olivového	Rozdíl od původního	Ceres + 15% olivového	Rozdíl od původního
I. číslo *E*	57·1	48·0	9·1	44·5	12·6	43·5	13·6
II. číslo *E*	25·2	18·8	6·4	17·9	7·3	18·1	7·1
Součet	**82·3**	**66 8**	**15·5**	**62·4**	**19·9**	**61·6**	**20·7**

	Ceres	Ceres + 5% pod-zem. ol.	Rozdíl od původního	Ceres + 10% pod-zem. ol.	Rozdíl od původního	Ceres + 15% pod-zem. ol.	Rozdíl od původního
I. číslo *E*	57·1	49·3	7·8	41·1	16 0	40·4	16·7
II. číslo *E*	25·2	17·8	6·5	20·2	5·0	20·2	5·0
Součet	**82·3**	**68·0**	**14·3**	**61·3**	**21·0**	**60·6**	**21·7**

Z výsledků uvedených vysvítá, že pozná se již dle prvého čísla ethylestherového docela dobře 10% ba i ještě 5% přidaného oleje obsahujícího jen v nejskrovnější míře těkavé kyseliny. Kdežto dle výpočtů každých 5% cizího tuku mělo by snížiti číslo ethylestherové as o 3 jednotky nalezeno snížení pro 5% i 10% dvoj.- až trojnásobné; lze však pozorovati, že rozdíly tyto dalším přídavkem nejsou stálé, nýbrž, že hodnota jich klesá, a že tedy ze směsi s 15% cizího tuku již poměrně méně esterů vytěká než-li s 50%.

Ke konci vzdáváme díky p. Thianovi Jar., posl. IV. roč. techn. chemie za účinnou pomoc při některých destilacích.

Výsledky.

1. V práci této jednalo se o to, modifikovati metodu ke stanovení čísla ethylestherového tak, aby se dalo ještě bezpečně dokázati v tuku máselném 10% tuku kokosového. Zkoušen za tím účelem: 1. obohacovací způsob Arnoldův, totiž extrakce tuků alkoholem a 2. postupná destillace.

2. Podíly tuku máselného i kokosového v alkoholu rozpustné (dle obohacovacího způsobu Arnoldova) vykazují větší číslo ethylestherové.

3. Přežene-li se místo 100 *cm*³ vodného destillátu 150 *cm*³ stoupne číslo ethylestherové u obou tuků; u kokosového tuku poměrně však mnohem více, tak že rozdíl mezi oběma čísly se nápadně zvětší; pohybují se pak čísla ethylestherová u másla v mezích od 11·5 do

18·2 u tuku kokosového od 55·5 do 60·2, rozdíl jest tedy průměrně o 40 jednotek.

4. Diference tato stoupne, přežene-li se dalších 100 cm^3 destillátu, určí se opět jeho číslo ethylestherové a přičte-li se k číslu prvému. Součet takto získaný pohybuje se u másla v mezích od 18·8 do 23·0 tedy v mezích mnohem užších než jak vytknuto v odstavci 3. a u kokosového tuku od 78·8—87·0. Průměrný rozdíl jest 60.

5. Součtem ethylestherových čísel prozradí se sice již $5^0/_0$ní přísada kokosového tuku v másle, bezpečně se však pozná $10^0/_0$ní přídavek, při čemž možno vzíti za hoření hranici pro součet čísel ethylestherových u másla i hodnotu 25, která však u 54 vzorků másla nebyla nikdy dosažena.

6. Konservující prostředky povahy kyselé (benzoová, salicylová kyselina) nezvyšují čísla ethylestherová ani jejich součet; podobně přísada triacetinu a tributyrinu nemá vlivu na součet ethylestherových čísel, prozradí se však v lihovém destilátu, jehož číslo nápadně stoupne.

7. Součtu čísel ethylestherových lze úspěšně použíti k důkazu pro porušení tuku maselného kokosovým, pocházelo-li máslo od krav přikrmovaných chrástem řepným neb řepou krmnou i cukrovkou.

8. Aby se všechny ethylesthery z 5 gramů tuku vodní parou těkající získaly, jest zapotřebí přehnati nejméně 1000 cm^3 destilátu.

9. Jako lze číslem ethylestherovým poznati kokosový tuk v jiných tucích a olejích, tak lze obráceně poznati na základě tohoto čísla $5^0/_0$ní, s jistotou pak $10^0/_0$ní přísadu tuků neb olejů jiných s nepatrným množstvím těkavých kyselin, v kokosovém tuku.

Analytické a potravní laboratorium na c. k. české vys. škole technické v Praze.

XV.

Zur Theorie der Niederschläge.

Von **V. Láska.**

Mit 4 Textfiguren.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1910.)

In der vorliegenden Abhandlung, wird zunächst auf Grund des von Hellmann*) bearbeiteten Materials, eine Beziehung zwischen Max. Min. und dem Mittelwert des jährlichen Niederschlages aufgestellt, welche gestattet aus gegebenem Mittelwerte und dem Schwankungsquotienten (so wird nach Hellmann die Verhältnisszahl Max.: Min. genannt), die Extreme zu berechnen. Das Resultat wird benützt, um einen weiteren Beleg für die logarithmische Natur der Niederschlagszahlen beizubringen. In dieser Hinsicht, bildet diese Arbeit eine Ergänzung meiner früheren Mitteilung.**) Die angewandte Methode ist wieder die graphische, welche für solche Zwecke sich besonders eignet. Auch hier handelt es sich mehr um die Methode, als um allgemeine Resultate, welche wohl erst auf Grund eines ausführlicheren Materials, zu erhalten sein werden.

Um für unsere Zwecke die Beziehung zwischen drei gegebenen Grössen *a b c* graphisch darzustellen, benützen wir zwei parallele Gerade, welche von einer Transversale rechtwinklig geschnitten werden und machen (siehe Fig. 1.)***)

*) G. Hellmann, Untersuchungen über die Schwankungen der Niederschläge. Berlin 1909.

**) Ueber Reduktion der klimatologischen Elemente. Diese Sitzungsb. 1910.

***) In der Fig. sind die Buchstaben *b* und *c* zu vertauschen.

$$OA = a, \quad OC = c, \quad O'B = b.$$

Die vom Punkte C auf die Gerade AB gefällte Senkrechte, bestimmt einen Punkt P einer Kurve K, deren Gleichung

$$F(x, y) = 0 \qquad 1)$$

sein möge. Aus der Konstruktion ergeben sich die Gleichungen:

$$y = \frac{D}{a - b}(x - c) \qquad 2)$$

$$y = a - \frac{x}{D}(a - b) \qquad 3)$$

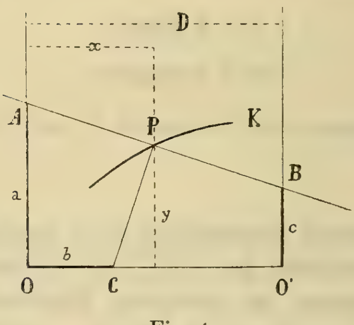


Fig. 1.

Durch Elimination von x und y aus 1) bis 3), folgt dann eine Gleichung

$$f(a, b, c) = 0 \qquad 4)$$

welche die gesuchte Beziehung darstellt.

Wenn zu einem Argumente c, mehrere Paare von a und b Werten gehören, dann müssen, falls die zu ihnen gehörigen Punkte in einem P Punkt zusammenfallen sollen, gewisse Bedingungsgleichungen erfüllt sein.

In unserem Falle können diese durch die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

ersetzt werden. Daraus folgt aber, dass wenn wir Beziehungen zwischen Max., Min. und dem Mitellwert beim Niederschlag auf diese Weise studieren wollen, nur Orte mit gleichem Schwankungsquotienten auf einer und derselben Kurve liegen werden. Streng

genommen, sollte also für jeden Schwankungsquotient eine besondere Kurve konstruiert werden. Leider steht hiezu kein geeignetes Beobachtungsmaterial zur Verfügung. Glücklicherweise ändert sich für sehr weite Gebiete der Schwankungsquotient sehr wenig, so dass man annehmen kann, dass die erhaltene Zeichnung, wenigstens das charakteristische Bild derartigen Kurven liefern wird.

Mann kann ubrigens zeigen, dass für mässige Variationen des Schwankungsquotienten die Kurven auch sehr nahe parallel bleiben.

Indem wir also von der Ungleichheit des Schwankungsquotienten absehen, setzen wir

$$a = \text{Max.} \quad b = \text{Min.}$$
$$c = \text{Mittelwert,}$$

und konstruieren (im Maasstab 1 *mm* = 1 *cm* Niederschlagsmenge) auf Grund des Hellmann'schen Materials die Kurve. Dieselbe zeigt deutlich eine Parabelform. Die Abweichungen der einzelnen Punkte von der Kurve sind bedingt:

1) Durch den Schwankungsquotien. Die Punkte Hermannstadt (Schwankungsquotient gleich 2·8), Neapel (3·1), San Fernando (4. 2) haben die grössten Abweichungen.
2) Durch die Ungenauigkeit der Werte selbst. Dieselben sind offenbar nicht als definitiv zu betrachten, obwohl sie nicht viel von der Wahrheit abweichen können.
3) Durch die lokalen Verhältnisse; weil die Zahlen wie jedes klimatologisches Element, noch einer geographischen und topographischen Reduktion auf homogenes Material, bedürfen.

Die Abweichungen von der Kurvenform haben also bei derartigen Untersuchungen eine spezielle Bedeutung und auf ihre numerischen Werte dürfen nicht die Probleme der Ausgleichsrechnung angewendet werden.

Das Resultat der graphischen Darstellung ist bildlich in der Fig. 2. und numerisch im Auszuge in der Taf. I. wiedergegeben, in welche auch zum Vergleiche der Schwankungsquotient s mit aufgenommen wurde. Es ergab sich eine, durch die Gleichung

$$F(x, y) \equiv y - 14 - \frac{41}{50} x + \frac{x^2}{500} = 0$$

ziemlich gut darstellbare Kurve K. Die Zahl δ in der Tafel I. gibt für die betreffenden Orte, die Abweichung dieser Gleichung gegen Null d. h. den Kurvenabstand des Punktes in *cm* der Niederschlags-

höhe. Die Grösse D wurde gleich 190 *mm* angenommen, weil ein Zeichenblock von dieser Breite verwendetet wurde.

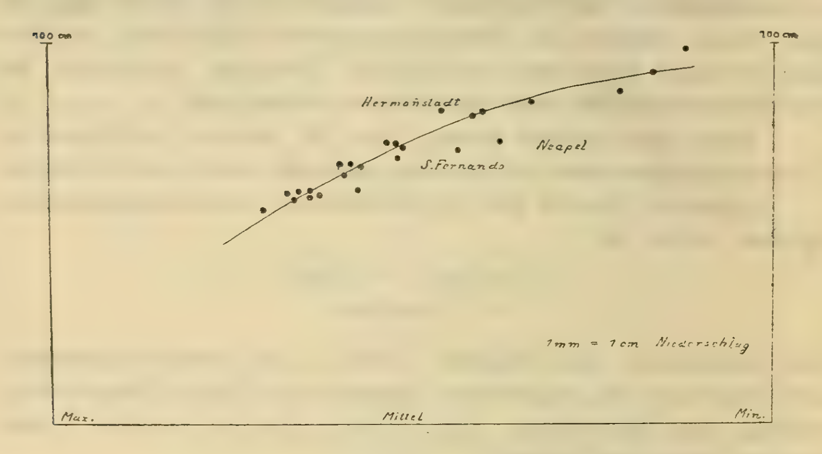


Fig. 2.

Taf. I.

		Max.	Min.	Mittel	δ	s
1	San Fernando	126	30	71	−7	4·2
2	Lissabon	134	44	74	0	3·0
3	Madrid	70	23	41	+4	3·0
4	Dijon	101	37	68	−3	2·7
5	Paris	74	39	54	+3	1·9
6	Greenwich	86	42	61	+3	2·1
7	Stonyhurst	158	79	119	0	2·0
8	Edinburg	99	45	67	+3	2·0
9	Rothesay	178	88	122	+4	2·0
10	Güttersloh	96	49	72	+1	2·0
11	Berlin	76	36	58	−1	2·1
12	Königsberg	84	33	64	−5	2·6
13	Görlitz	87	43	66	0	2·0
14	Genf	119	54	85	−1	2·2
15	Modena	103	41	69	0	2·5
16	Hermannstadt	127	46	68	+6	2·8

Diese Tafel zeigt dass, selbst in sehr ungünstigen Fällen wie z. B. bei San Fernando und Hermannstadt noch sehr brauchbare Resultate erhalten werden. Dieses Resultat ist bei der wagen Natur der Niederschläge ein sehr erfreuliches. Bemerkt mag noch werden, dass die Grössen δ nicht berechnet sondern einfach der Zeichnung entnommen wurden.

Mit Hilfe dieser Kurve, sind wir im Stande, sobald der Schwankungsquotient s und der Mittelwert c gegeben sind, auch das Max $= a$ sowie Min. $= b$, näherungsweise zu finden. Besonders einfach ist die graphische Konstruktion.

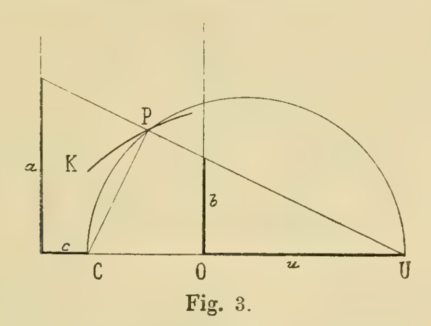


Fig. 3.

Man bestimme (Siehe Fig. 3.) den Endpunkt C der Strecke c. In der Richtung CO trage man von dem Nullpunkt O der b Achse, eine Strecke

$$OU = u = \frac{D}{s-1}$$

auf. Diese bestimmt auf der c Achse einen Punkt U. Wird über CU als Durchmesser ein Halbkreis gezeichnet, so schneidet derselbe die K Kurve im Punkte P, welcher mit U verbunden, an den Achsen die Strecken a und b abschneidet.

Die numerische Berechnung ist schon verwickelter.

Für $D = 190$ *mm* geben wir einige Koordinatenwerte:

x	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y	37	44	50	56	62	67	72	76	80	83

Liegt einmal die Kurve gezeichnet vor, so kann dieselbe selbstverständlich zur Kontrolle der beobachteten Werte benützt werden.

Auf Grund dieser Kurve können wir einer Frage näher treten, welche von grosser Wichtigkeit ist für die Erkenntniss der Schwankungen der Niederschläge.

Sei K diese Kurve (siehe Fig. 4.) und nehmen wir an, dass der Schwankungsquotient für alle Orte dieser Kurve gleich gross ist. Dann gehen alle Geraden, welche durch korrespondierende Endpunkte der Max. und Min. Skala bestimmt sind, durch einen und derselben Punkt R. Die durch den Skalenwert des Mittelwertes bestimmten Senkrechten auf diese Gerade, umhüllen eine Kurve K', welche die Mittelwertgerade in einem Punkte M schneiden möge. Die Lage dieses Punktes ist eine Funktion des Schwankungsquotienten.

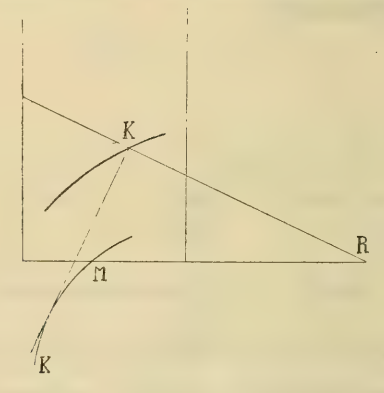


Fig. 4.

Wir haben den Satz:

Wachsen die Maxima und Minima der Niederschläge, dann nimmt auch der Mittelwert im allgemeinen zu, aber bis zu einer bestimmten Grösse, welche von Schwankungsquotient abhängig ist. Von da an nimmt der Mitelwert mit wachsenden Extremen ab.

Je grösser der Schwankungsquotient, desto grösser ist auch der Mittelwert, bei welchem die Umkehr stattfindet und da für gewöhnlich der Schwankungsquotient grösser als 2. ist, so liegt auch der Mittelwert unter dem Umkehrwerte.

Wir können daher sagen:

Mit wachsendem Mittelwerte bei gleichem Schwankungsquotient, wachsen in der Regel auch die Extreme.

Auf diesem Fundamentalsatz beruht die logarithmische Natur der Niederschlagszahlen, für welche somit ein neuer und allgemeiner Beleg hiemit beigebracht erscheint.

Wir möchten es nicht unterlassen an dieser Stelle zu erwähnen,

dass erst durch Hellmann's Fundamentalwerk derartige Untersuchungen möglich geworden sind. Dasselbe ist eine wahre Fundgrube derartiger Probleme, denen unzweifelhaft die Zukunft gehört. Das meteorologische Material ist zurzeit statistisch schon so verarbeitet und nach allen Seiten umgewendet, das man in dieser Weise nur nach „guten Mustern“ das Mehr verarbeiten könnte. So wird die Klimatologie zu einem Zweige der angewandten Mathematik, für welchen die Klimatographie das Zahlenmaterial und die Meteorologie die Erklärung der durch die Klimatologie geschaffenen Typen der Erscheinungen, zu geben bestimmt ist.

XVI.

O encystaci Pelomyxy.

Podává **Antonín Štolc**.

(S 1 tabul.)

Předloženo v sezení dne 24. června 1910.

I.

Tvoření se ochranných schránek čili cyst u *Pelomyxy* pozoroval jsem r. 1893 na materiálu doma pěstovaném. V pozdější době nepodařilo se mi toho více, ani na materialu, který doma pěstuji nepřetržitě od uvedené doby až po dobu dnešní, ani na materialu, jenž čerpán byl ze známého naleziště u Prahy (tůňky na vrchu Ládví v lese Ďáblickém), to pak v různých dobách ročních, s počátku každého roku, později po delších přestávkách časových. V posledním čase věnoval jsem jevu tomuto pozornost úsilovnější, avšak s výsledkem negativním. Nevěda pak, zdali i v době příští budu šťastnější, odhodlávám se tuto uveřejniti dosavadní své, ovšem kusé vědomosti o tvoření se cyst *Pelomyxy*.

II.

V létě r. 1893 ze zásoby přinesené z tůňky na Ládví založil jsem kulturu pěstovanou ve velké pěstovací nádobě způsobem, jejž podrobněji jsem naznačil v práci své jednající o zažívání a tvoření se uhlohydratů u *Pelomyxy*.*)

*) A. Štolc, Beobachtungen u. Versuche über die Verdauung u. Bildung der Kohlenhydrate bei einem amoebenartigen Organismus, Pelomyxa palustris Greeff. (Zeitschr. f. wiss. Zoologie, 68. B., 1900.

V této kultuře ku konci podzimu (v první polovici prosince téhož roku) objevily se cysty *Pelomyxy*. Na jedincích, kteří byli isolováni v krátkých skleněných nádobkách, ponořených do vody ve velké nádobě pěstovací, mohl jsem přímo sledovati děj tvoření se cyst. Stručně podán jeví se asi následovně: Tělo jedince jest bílé, zbavené veškeré potravy i zbytků jejích. Obsahuje četná jádra, přiživné bakterie a lesklá tělesa ve zvláštním stavu. Tělo rozděluje se na několik částí, a to nestejných, velikosti značné a až nepatrné. Z každé takové části povstává cysta *Pelomyxy*. Části se zakulacují i vylučují hmotu, z níž povstává dvojitý obal, jímž se obklopují: vnější hlenovitý a vnitřní chitinovitý. K vnějšímu obalu lnou částečky humusové a jiné, jako zbytky řas a zrnéčka písková. Vnější obal jest méně neb více široký, často tak nezřetelný, že obal zdá se býti jednoduchým.

Vnitřní chitinový obal jest tuhý, dosti silný, barvy světle hnědé. Tento vnitřní obal není úplně hladký, bez struktury, nýbrž jsví podlouhlé jamkovité vtisky, pravidelně seřazené.

Vnitřní obal přiléhá těsně k plasmatickému obsahu cysty, může však i býti od něho oddálen.

Rozmáčknutím čerstvě utvořené cysty přesvědčíme se, že plasmatický obsah chová četná jádra, souživné bakterie a lesklá tělesa ve zvláštním stavu. Tato mají totiž blány obalné tak tenké a obsah glykogenový tak řídký, že rozmáčknutím cysty blány obalné lesklých těles snadno se protrhávají a obsah jejich splývá v tekutinu mlékově bílou, jodem na hnědo se barvící.

Cysty zůstávají buď pohromadě, jak se byly rozdělením jednoho jedince utvořily, aneb objevují se jednotlivě. Jak již bylo naznačeno, jsou velikosti různé. Na př. z jednoho jedince utvořilo se patero cyst, jejichž rozměry (průměry) byly následující: 1 *mm*, 0·35 *mm*, 0·3 *mm*, 0·2 *mm*, 0·2 *mm*.

Některé z čerstvě utvořených cyst isoloval jsem do krátké skleněné nádobky, ponořené do vody ve velké nádobě pěstovací, abych mohl sledovati, co s nimi dále se díti bude. Ještě v dubnu následujícího roku nalezl jsem cysty ty neporušené. Rozmáčknutím jedné takové cysty bylo možno se přesvědčiti, že plasmatický obsah její chová četná jádra, souživné bakterie a plno lesklých těles různé velikosti. V době pozdější cyst isolovaných jsem více nenalezl, z toho pak nutno souditi, že plasmatický obsah cyst obal opustil, prázdné pak obaly cyst staly se tou měrou nezřetelny, že v humusu na dně isolační nádobky víc nalezeny býti nemohly.

III.

Příčinu tvoření se cyst *Pelomyxy* zajisté vedle dostatečného pozorování rozluští na jisto zkoumání pokusné. Prozatím nutno se spokojiti domněnkou. Cysty *Pelomyxy* tvoří se asi za podobných okolností jako u jiných příbuznych jednobuněčných ústrojenců, totiž když ústředí, v němž *Pelomyxa* žije, mění se nějakým podstatným způsobem v neprospěch její, na př. voda se kazí neb vysýchá. Rozšiřování *Pelomyxy* děje se asi ve stavu encystovaném působením větru neb ptáky přelétavými, přenášením cyst *Pelomyxy* z vysýchajících ústředí vodních do jiných příhodných ústředí vodních.

Tak lze si i vysvětliti vyskytování se *Pelomyxy* v tůňkách na Ládví v lese Ďáblickém.

Tůňky tyto povstaly v jámách po vylámaném buližníkovém kamení štěrkovém, jež naplněny byly vodou a osídleny pak *Pelomyxou* asi tím způsobem, že cysty její sem byly přeneseny.

Tůňka na Ládví, z níž hlavně čerpal jsem po dlouhá léta material *Pelomyxy*, pokud vím, nikdy nevyschla, aniž poměry ústředí nějak v ní podstatně se změnily.

Z toho vysvítá, proč asi jsem v materialu z ní čerpaném nikdy cyst *Pelomyxy* nenalezl. Utvoření se cyst v materiálu doma pěstovaném domnívám se vysvětliti způsobem následujícím: V čerstvě založené kultuře poměry ústředí neodpovídaly s počátku přirozenému ústředí tůňky, v níž *Pelomyxy* žijí. Pěstovaným *Pelomyxám* bylo s počátku překonávati jistý odpor ústředí, jemuž někteří jedinci čelili tím, že se encystovali, t, j. vytvořili sobě ochranné schránky. Později poměry ústředí v pěstovací nádobě tou měrou ve prospěch *Pelomyxy* se změnily, že přiblížily se co nejvíce poměrům ústředí přirozeného. Tu pak encystované *Pelomyxy* ochranné obaly své opustily a žily dále v nádobě pěstovací a množily se bez encystování. Tím způsobem možno vysvětliti, proč v pěstovací nádobě vícekráte jsem tvoření se cyst *Pelomyxy* nepozoroval, ač do ní dáván byl po mnohohráte nový material přinesený z přirozeného ústředí, z tůňky na Ládví, v přestávkách tu kratších, tu delších, ba i delších více než jednoho roku.

IV.

Jeví se mi dosti pozoruhodným srovnati způsob tvoření se cyst *Pelomyxy*, totiž rozdělením těla na nestejné díly, se způsobem tvoření se cyst u plasmodia Myxomycetů, zejména pak tak zva-

ných **makrocyst**, jak nazývá je Zopf v souborné své práci o myxomycetech.*)

Tvoření se těchto cyst podrobněji popsal L. Cienkowski**) u plasmodia myxomyceta *Licea pannorum* (*Perichaena corticalis*). Choval kulturu tohoto myxomyceta a sledoval vývoj cyst (nazývá je „derbwandige Cysten“) z plasmodia na sklíčku objektivním. Plasmodium rozpadá se na více částí nejrůznější velikosti. Každá část stahuje se v kulovité těleso, povrch jeho tvrdne na vráščitou tmavohnědou blánu ponenáhlu od obsahu plasmatického se odtahující. Také tento obsah plasmatický nabývá podoby kulovitě, stává se hrubě zrnitým a na povrchu jeho objevuje se ještě jedna, dvojitě konturovaná blána.

Povrch zevnější blány bývá nezřídka pokryt cizími tělísky tou měrou, že obsahu vnitřního není viděti.

Velikost cyst jest velmi různá, neboť vedle cyst o velikosti výtrusnic tohoto myxomyceta vyskytují se často zcela drobné cysty, sotva velikost výtrusu převyšující.

Cysty vyskytují se buď jednotlivě aneb ve skupinách, jsouce k sobě přilepeny.

Cienkowski mohl pozorovati i další osud cyst. Z cyst, které po více týdnů byly podrobeny vysýchání a pak byly opět vodou navlhčeny, vylézal plasmatický obsah. Vylézání plasmatického obsahu čili plasmodia dálo se velmi pomalu. Cysty ležely několik neděl beze změny ve vodě, pak obsah jejich nabyl na rozměrech, obrysy jeho ponenáhlu se měnily, hrubě zrnéčkatý vzhled měnil se na periferii v tekutý, protrhl pak obě blány obalné i opustil je, zanechav vnitřní blánu jakožto svraskalý váček, obklopený blanou vnější.

Vylezlá plasmodia nelišila se nijak od plasmodií obyčejných. Dle Cienkowského pomocí takovýchto cyst, jakožto stavů odpočívajících, chrání se mladá plasmodia uvedeného myxomyceta před nepříznivými vlivy ústředí, a za hlavní příčinu tvoření se cyst považuje Cienkowski ponenáhlé vysýchání.

Vysvětlení vyobrazení.

Fig. 1. Cysta *Pelomyxy*, ukazující vnější obal hlenovitý, vnitřní obal chitinovitý a kulovitý plasmatický obsah.

Fig. 2. Skupina pěti cyst *Pelomyxy*, povstalých rozdělením těla jednoho

---

*) Zopf, Die Pilztiere oder Schleimpilze, str. 92 (v Schenkově „Handbuch der Botanik“, Vratislav 1887).

**) Cienkowski, Das Plasmodium, str. 423 a násl. (v Pringsheimových „Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik“, III. B., 1863).

jedince. Cysta největší jest rozmáčklá a její obsah plasmatický částečně vyniklý ven. Jedna ze dvou nejmenších cyst jeví zřejmě dvojitý obal.

Fig. 3. Skupina tří cyst *Pelomyxy*, povstalých rozdělením těla jednoho jedince. Dvě z cyst jsou rozmáčklé, s obsahem plasmatickým částečně vystouplým.

Fig. 4. Malá cysta *Pelomyxy*, na jejímž povrchu jsou částečky humusové, zbytky řas a zrnéčka písková.

Fig, 5. Cysta *Pelomyxy*, jež několik měsíců odpočívala jsouc isolována. Jest rozmáčklá, s obsahem plasmatickým vyniklým.

Fig. 6. Část vnitřního chitinovitého obalu, ukazující strukturu jeho.

Résumé des böhmischen Textes.

Ueber die Cystenbildung bei Pelomyxa.

Im Jahre 1893 habe ich die Bildung der Cysten bei *Pelomyxa* an einem im Zimmer kultivierten Materiale beobachtet. Später ist mir das nicht mehr geglückt und zwar weder an dem seit dieser Zeit ununterbrochen in Kultur gehaltenen, noch an frisch gesammelten Materiale, welch' letzteres ich mir während verschiedener Jahreszeiten, anfangs jährlich, dann in längeren Zeitpausen von der bekannten Prager Lokalität (Tümpel am Berge Ládví im Ďáblicer Walde) holte. In letzter Zeit habe ich dieser Erscheinung viel Aufmerksamkeit geschenkt, doch mit ausschliesslich negativem Erfolge.

Da ich nicht weiss, ob ich künftig diesbezüglich mehr Glück haben werde, so habe ich mich entschlossen meine bisherigen, natürlich lückenhaften Erfahrungen über die Cystenbildung bei *Pelomyxa* an dieser Stelle zu publizieren.

In der Sommersaison 1893 habe ich das am Berge Ládví gesammelte reichliche *Pelomyxa*-Material in ein Aquarium überführt und dadurch eine bis auf den heutigen Tag bestehende Kultur angelegt. Näheres darüber vergl. in einer meiner früheren Arbeiten.*) In dieser Cultur sind zu Ende des Herbstes (in der ersten Hälfte des Dezembers) Cysten der *Pelomyxa palustris* erschienen.

An jenen Individuen, welche in kurze, in dem grossen Culturbecken untergetauchte Glasröhrchen isoliert wurden, konnte der Vor-

*) A. Štolc, Beobachtungen u. Versuche über die Verdauung u. Bildung der Kohlenhydrate bei einem amoebenartigen Organismus, Pelomyxa palustris Greeff. (Zeitschr. f. wiss. Zoologie, 68. B.. 1900.)

gang der Cystenbildung direkt verfolgt werden. Es traten folgende Erscheinungen zu Tage.

Zu Beginn der Encystierung erscheint der Körper weiss, da in ihm Nahrungspartikeln und deren Überreste fehlen. In dem Protoplasma sieht man nur Kerne, symbiotische Bakterien und Glanzkörper, letztere in einem besonderen Zustande, von welchem später die Rede sein wird. Der Körper teilt sich dann in mehrere und zwar ungleiche Teile, deren Dimensionen sehr variieren. Aus jedem solcher Teilstücke wird schliesslich eine Cyste, indem die Stücke sich abrunden und besondere Stoffe secernieren, die eine zweifache Hülle liefern. Die äussere, mehr oder weniger breite, zuweilen sogar undeutliche Hülle ist von einer schleimigen Consistenz, so dass an ihr verschiedene Partikeln (Humus, Algenüberreste, Sandkörnchen) haften bleiben, wogegen die innere, derbere, ziemlich dicke und hellbraune Hüllmembran chitinartiges Aussehen hat.

Letztere Hülle ist noch dadurch bemerkenswert, dass ihre Oberfläche keineswegs glatt, strukturlos, sondern in regelmässigen Abständen mit seichten länglichen Grübchen versehen ist.

Gewöhnlich liegt die innere Hülle dem plasmatischen Inhalte dicht an, doch kann sie auch zuweilen von ihm abstehen. Wird eine frisch entstandene Cyste zerdrückt, so kann man in dem herausfliessenden Inhalte die einzelnen Inhaltskörper, nämlich Kerne, symbiotische Bakterien und Glanzkörper konstatieren. Die letzteren Körper befinden sich in einem besonderen Zustande, indem ihre Hüllen so dünn erscheinen und einen so dünnflüssigen Glykogeninhalt führen, dass bei dem Zerdrücken der Cyste die Hüllen leicht bersten und deren Glykogeninhalt in eine milchige Flüssigkeit, welche mit einer Jodlösung braun sich färbt, zusammenfliesst.

Die durch den Zerfall eines Individuums entstandenen Cysten können dicht beisammen stehen, oder sie erscheinen vereinzelt. Wie stark ihre Dimensionen schwanken, mag an einem Beispiel illustriert werden, wo die aus einem Individuum entstandenen fünf Cysten folgende Durchmesser besassen: 1 *mm,* 0·35 *mm*, 0·3 *mm*, 0·2 *mm*, 0·2 *mm.*

Um zu sehen, was aus den Cysten später wird, habe ich einige von den frisch gebildeten in die besagten kurzen Glasröhrchen isoliert und die letzteren in dem grossen Culturgefäss untergetaucht gehalten. Noch im April des folgenden Jahres fand ich die Cysten unverändert. Nachdem ich eine von ihnen unter dem Deckglase zerquetscht hatte, konnte ich mich von der Existenz unversehrter Kerne,

symbiotischer Bakterien und Glanzkörper (von verschiedener Grösse) überzeugen. In der späteren Zeit habe ich die Cysten in den Isolationsröhrchen nicht mehr ausfindig machen können und so schliesse ich, dass die protoplasmatischen Inhalte ihre Hüllen verliessen und die leeren Hüllen im Folgenden dermassen undeutlich wurden, dass ihre Überreste im Humus, welches am Boden des Glasröhrchens sich befand, nicht mehr entdeckt werden konnten.

Es ist interessant die Art der Cystenbildung der *Pelomyxa* (durch Teilung des Körpers auf mehrere ungleiche Stücke) mit der Cystenbildung der Myxomyceten-Plasmodien, insbesondere mit der Bildung der sog. Makrocysten (nach Zopf) zu vergleichen.*)

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. *Pelomyxa*-Cyste mit ihrer äusseren schleimartigen und inneren chitinartigen Hülle, welche den kugelig zussammengezogenen plasmatischen Inhalt umschliessen.

Fig. 2. Gruppe von fünf *Pelomyxa*-Cysten durch den Zerfall eines Individuums gebildet. Die grösste Cyste zerdrückt, mit teilweise herausgeflossenem Plasmainhalte. Eine von den zwei kleinsten Cysten zeigt deutlich ihre doppelte Hülle.

Fig. 3. Gruppe von drei Cysten durch den Zerfall eines Individuums gebildet. Zwei Cysten zerdrückt, mit teilweise herausgetretenem Plasmainhalte.

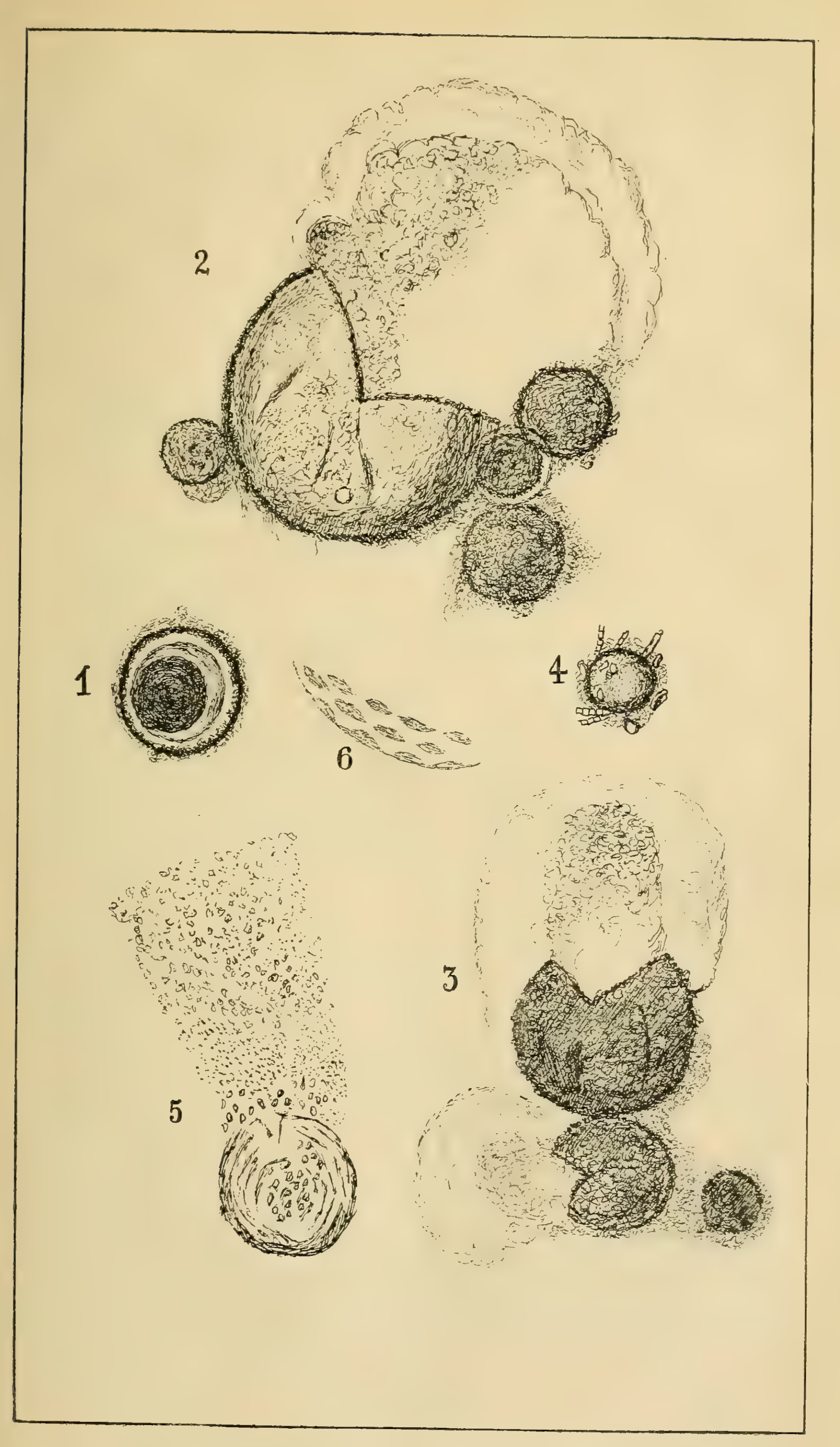
Fig. 4. Kleine *Pelomyxa*-Cyste, an deren Oberfläche Humuspartikeln, Algenüberreste und Sandkörnchen haften.

Fig. 5. Isoliert kultivierte *Pelomyxa*-Cyste nach mehrmonatlicher Ruhe zerdrückt, mit herausgequollenem Protoplasmainhalte, in welchem Kerne, Glanzkörper und symbiotische Bakterien zu sehen sind.

Fig. 6. Ein Teil der inneren chitinartigen Hülle stark vergrössert, um ihre Struktur zu zeigen.

---

*) Zopf, Die Pilztiere oder Schleimpilze, Seite 92 (in Schenks „Handbuch der Botanik", Breslau 1887).


2
1
6
4
3
5

XVII.

Monographia generis Trioza Foerster.

Species regionis palaearcticae.

Pars I., No. 1—10.

Dr. **Karel Šulc**, Michálkovice-Ostrava, Moravia.

Mit 10 Tafeln.

Vorgelegt in der Sitzung am 24. Juni 1910.

1. **Trioza urticae** L., autorum.

Kopf. — Scheitel hinten mäßig ausgeschnitten, 0·32 *mm* breit, 0·18 in der Mittellinie lang, die hinteren Ecken abgestutzt, die vorderen breit abgerundet, die hinteren Punktaugen ein wenig vorgerückt. Fühler im ganzen 0·75 *mm* lang; Sinnesgruben: eine ganz kleine runde nur 0·004 *mm*, i. D. messende am 2. Gliede, je eine kreisrunde 0·01 *mm* i. D. messende am 4., 6., 8., 9. Gliede, zwei kleine 0·006 *mm* messende am 10. Gliede.*)

Stirnkegel von breiter Basis zum schmalen abgerundeten Gipfel gleichmäßig langsam verschmälert, divergierend, nur 0·18 *mm* lang. — Färbung des Kopfes: Grund schmutzig grün, gelblich, Zeichnung mehr oder weniger verbreitet, meist einen schmalen Saum um den Vorderrand freilassend; Fühler: das erste und 5.—10. Glied bräunlich bis schwarzbraun, das 2.—4. gelblich, grünlichgelb; oder wie Flor angibt: die Fühler schwarz, Glied 2 und 3 weiß, 4 häufig

*) Die Fühlergruben haben in der Mitte der kesselartigen Vertiefung eine kleine, etwa 1 Drittel des D. messende Öffnung; manchmal ragt (bei der Ansicht von der Seite) ein trichterförmiges Gebilde aus ihnen heraus (siehe Abbildung), welches analog der Ohrmuschel zu fungieren scheint und wahrnscheinlich ausstülpbar ist.

bräunlich mit weißer Basis; zuweilen sind nur die 3 letzten Fühlerglieder und das erste schwarz, die übrigen weiß (wie ZETTERSTEDT die Fühler beschreibt) oder die Fühler gehen vom 4ten Gliede ab bis zum 8ten allmählich aus gelbbräunlich in schwarz über; selten ist das erste Glied hellgelb nur undeutlich gebräunt. Stirnkegel schwarz, zuweilen an der Basis breit bräunlichgelb.

Thorax: bei unausgefärbten Individuen stark punktiert, Grund gelblich, grünlichgelb, Zeichnung lichtrot oder schwärzlichbraun, bei gut ausgefärbten bis ganz schwarzbraun, nur die Mitte des Prothorax bleibt weißlich.

Vorderflügel 3 *mm* lang, 1·25 grösste Breite am Anfang des äußeren Drittels. — Flügelende liegt am Ende des vorderen Drittels des Randes *cell.* $M1 + 2$, hat stumpfe, fast abgerundete Spitze, der Radius der vorderen Bogenhälfte ist länger als jener der hinteren. — Flügeladern: *Rs* fast gerade, nur leicht wellenförmig, sie endet über dem Anfang des äusseren Drittels der $M1 + 2$; *R*1 schmiegt sich mit seinem ersten $^1/_4$ der *M* eng an; *M* sehr lang, ihr Ende über der Hälfte des Randes *cell. M*; $M1 + 2$ leicht bogenförmig, etwas länger als $M3 + 4$; *Cu* 1 stark bogenförmig. — Färbung der Adern ist lichtgelb, deren Rippen bei sehr dunklen Exemplaren fein rotbraun. — Flügelmembran sehr fein, wasserhell. — Dornen: Oberflächedornen: von denselben nur eine unbedeutende Gruppe in der hinteren Ecke *cell. Cu* vorhanden, sonst die ganze Membran dornenfrei; Marginalgruppen in den *cell.* $M1 + 2$, *M* und *Cu* 1 vorhanden, schon makroskopisch sichtbar, sie sind schmal, an der Basis ein wenig breiter, aus 5—6, weiter höher aus 2—3 Dornen in Querrichtung bestehend, sie erreichen cca. die Hälfte der Höhe der *cell.* $M1 + 2$ und *Cu* 1, und haben cca. 14—16 Querreihen.

Hinterflügel: 2 *mm* lang, 0·70 *mm* am breitesten in dem äußeren Drittel, das Flügelende von hinten nach vorn breit abgerundet, Gipfel des Bogens im Rande *cell. Rs,* genähert der Insertionsstelle *Rs*; die vordere Hälfte des Bogens hat einen bedeutend kürzeren Radius als die hintere; Vorderrand gerade; *M* (ungeteilt) und *Cu* bilden eine kurze $M + Cu$, die dann mit *R* $R + M + Cu$ bildet; *Rs* gerade, selbständig, *R* 1 ist verschwunden; *Cu*, *Cu*1, *Cu*2 gut entwickelt; Farbe der Membran wasserhell, $C + Sc$, $R + M + Cu$, $A2 + 3$ sind bräunlich.

Beine: gelblich, schmutziggelb, die Schenkel bräunlich, bis ganz braunschwarz.

Abdomen: Segmentplatten siena bis sepiabraun, ihre schmalen Hinterränder und die Verbindungsmembran gelblich, grünlich.

♂ Körperende. — Genitalsegment 0·20 *mm* hoch, 0·23 *mm* lang. Seitenansicht: unten hinten gleichmäßig bogenförmig begrenzt, unter dem Zangenansatze leicht ausgeschweift, zerstreut behaart, schwarzgrünlich bis braunschwarz. — Kopulationszange: von der Seite gesehen, 0·23 *mm* hoch, gerade, schmal, in der Mitte am schmälsten, im oberen Drittel ziemlich verbreitet, endet in einem abgerundeten, kleinen, kurzen, schmalen, fingerförmigen Fortsatze. — Von oben biegen sich die Zangenäste zur Mittellinie, verschmälern sich rasch und endigen mit einer scharfen, stark hakenförmig nach vorn gebogenen Zacke; auf den Präparaten sehen wir mit starker Vergrößerung, daß die Zacke eigentlich aus zwei messerartigen, starken Dornen besteht, über welchen oben eine starke Borste steht. — Von hinten werden die Zangenbranchen gegen das Ende allmählich schmäler, der Hinterrand ist im oberen Drittel erweitert, der äußere Umriß ist 0-förmig, der innere, eine unten scharfe Ellipse. — Vorder- und Hinterrand stark behaart, Färbung gelbgrünlich bis schwarzbraun. — Analsegment: 0·27 *mm* hoch, 0·17 *mm* maximale Breite in der Mitte der Höhe, Vorderrand schwach nach vorn, Hinterrand stark nach hinten, gleichmäßig ausgebuchtet; Analring sehr schwach chitinisiert, 0·04 *mm* hoch, 0·06 *mm* lang, mit dem Basalteil verwachsen, nur das kurze hintere Ende frei, von unten nach oben hinten abgestutzt; Oberseite horizontal liegend; die Behaarung, namentlich in der oberen Hälfte, dicht und stark; schwarzgrün bis schwarzbraun.

♀ Körperende. — Analsegment von oben gesehen lang, keilförmig, das Ende abgerundet, die vordere Partie um den Anus ist weich, nich genügend chitinisiert; von der Seite an Präparaten länglich-dreieckförmig, Länge 0·52 *mm*, die größte Breite 0·15 *mm*; der obere Umriß nach hinten und unten allmählich herabfallend, bucklige Konvexität sehr niedrig, der Kiel des Schnabels glatt, leicht nach oben gebogen, der Schnabel selbst gegen das abgerundete Ende gleichmäßig verschmälert, seine Längsachse nach unten gebogen, sein unterer Umriß fast gerade; das ganze Segment ziemlich dicht behaart, auf dem Buckel einige längere Haare, die ganz vordere Partie vor und neben dem Anus unbehaart, um den Anus ein Ring von kleinen Haaren; Dornen fehlen vollständig. — Grünlich bis schwarzbraun. — Anus 0·15 *mm* lang, ringsum ein geschlossener Ring mit zweireihigen Drüsenöffnungen. — Genitalsegment von der Seite länglich dreieckig, obere Seite gerade 0·45 *mm* lang, untere

gerade, 0·55 *mm*, ohne Buckel, vordere nach vorn stumpfeckig, 0·26 *mm*; der Schnabel kurz ausgezogen, scharfeckig; die ganze Oberfläche mit langen, dichten, gleichmässig zerstreuten Haaren bedeckt. — Grünlich bis schwarzbraun. — Äußere Legescheiden nach hinten gleichmäßig abgerundet, um den hinteren Teil fein, länglich geritzt, reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes. — Äußerer Legestachel hat eine gerade Achse, gleichmäßig breiten Körper, am oberen Umriss eine schmale Leiste, das Endstück kurz, verschmälert das Ende scharf zugespitzt, oben mit einem scharfwinkligen Zahne. Der Körper und das Endstück des Legestachels sind stark chitinisiert. — Innerer Legestachel: der Endteil dreieckig beilförmig, das Ende abgestutzt, Leiste am unteren Rande, ein kleiner Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren die in Schlesien (Teschner Kreis), Michalkowitz, in meinem Garten auf Urtica dioica L. gefangen wurden, angefertigt.

Körpergröße 3—3·75 *mm*, gemessen vom Kopfe zum Ende der zusammengelegten Flügel.

Nährpflanze: Urtica dioica L., U. urens L.

Lebensweise: sie überwintert, im Frühjahr Kopula, dann folgen sicher wenigstens zwei Generationen; vom Frühjahr bis zum Herbste finden wir alle Stadien der Larven und verschiedenengradig ausgefärbte vollkommene Insekten; die späten Larven gehen durch Fröste zugrunde.

Larven hat schon Degeer beschrieben und abgebildet.

Vorkommen: überall, häufig.

Geographische Verbreitung: tota Europa. — Böhmen: Duda, Catalogus (1892); coll. Duda, Mus. Reg. Boh. leg.? loc.?; überall auf Urtica, Šulc.

Literatur und Synonymie.

urticae (Chermes), Linné C., Fauna Svecica, Holmiae 1767.
„ Degeer, Abhandlungen zur Geschichte der Insekten (Übersetzung von Goetze) Nürnberg 1778.
„ Fabricius, Rhyngota.
„ Zetterstedt J. W., Fauna ins. Lapponica, Hammone, 1828.
„ idem, Insecta Lapponica descripta, Lipsiae, 1840.
„ Burmeister, Handbuch, 1835.
eupoda, Hartig, Versuch einer Einteilung der Pflanzenläuse nach d. Flügelbildung. (Germar. Zeitschr. f. Ent. 1841.)
„ Foerster, Psylloden 1848.

urticae, idem, eodem.
forcipata, idem, eodem.
protensa, idem, eodem.
crassinervis, idem, eodem.
Cnidopsylla, Amyot, Ann. Soc. Ent. Fr. 1847.
urticae, Flor, Rhynchota Livlands, Dorpat, 1851.
„ idem, Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva 1861.
„ Meyer-Duer, Psylloden, Schaffhausen, Schw. ent. Ges., 1871.
eupoda, idem, eodem.
forcipata, idem, eodem.
protensa, idem, eodem.
crassinervis, idem, eodem.
bicolor, idem, eodem.
urticae, Lethierry, Catalogue des Hémiptères du dep. du Nord., Lille, 1874.
„ Thomson. Opuscula entomologica, Lund, 1878.
„ Reuter M. O., Catalogus Psyllodearum Fenniae, Fauna-flora fenn 1877.
„ idem, Sveriges Psylloder. Ent. Tidskr. 1880.
„ Scott, Monograph British Psyllidae, (Transac. Ent. Soc. London), 1876.
„ Horváth G., A magyarországi Psyllidákról, Budapest, 1885.
„ Loew F., Katalog der pal. Psylloden, W. ent. Ztg. 1882.
„ idem, Revision der pal. Psylloden, W. z. b. Ges. 1882.
„ idem, Jugendstadien der Psylloden, eodem, 1884.
„ idem, Übersicht der Psylloden von Oest. Ung. 1888.
„ Duda L., Hmyz polokřídlý, v Čechách žijící, Pragae, 1892.
„ Carpentier-Dubois, Matériaux p. faune d. Hém. de l'Oise, Amiens, 1892.
„ Edwards, Hem. Hom. Brit. Island, London, 1894.
„ Puton, Catalogue, Caen. 1899.
„ Ošanin B., Verzeichnis der pal. Hemipteren, Petersburg. 1907.

---

2. Trioza acutipennis ZETT. 1828.

Kopf. — Scheitel hinten 0·35 *mm* lang, gerade, in der Mittellinie 0·20 *mm* lang. Hinterecken abgestutzt, je ein Punktauge tragend, die Vorderecken breit abgerundet. — Fühler 0·85 *mm* lang; Sinnesgruben auf dem 2., 9. und 10. Gliede wie bei *urticae L.*, das 4. und 6. Glied (letzteres weniger deutlich) unten mit verdickten, sägeartig vorspringenden Spitzen, die wohl dreimal breiter sind als die Basis des nachfolgenden Gliedes; am Oberrande erscheinen dagegen die Glieder geradlinig fortlaufend; Ursache der Verdickungen sind 5—6 enorm große, dicht aneinander liegende, Sinnesgruben am 4. Gliede und 2 dergleichen am 6. Gliede; sie bilden längliche Vierecke mit breit abgerundeten Ecken, 0·024 im l. D. 0·020 *mm* im k.

D., die Trichter sind 0·012 im D., ihre centrale tränenförmig verlängerte Öffnug 0·004 *mm* im D.; der Trichter erscheint dunkler, da er stärker chitinisiert ist; die Sinnesgrube des 8. Gliedes ist abgerundet, dreiseitig, etwas größer als bei *urticae L.*, 0·01 im D., die Trichteröffnug ist dreieckförmig, mit eingebuchteten Seiten. — Stirnkegel 0·14 *mm* lang, aus breiter Basis lang ausgezogen, divergierend. — Färbung: Scheitel schwarzbraun, bis ganz schwarz, mit schmalem, weißlichgelbem, licht- oder rotbraunem Saume, Stirnkegel und Fühlergruben schwarzbraun; Fühler: das 1. und 2. Glied braun, das 9. und 10. ganz schwarz, das 8. in der distalen Hälfte schwarzbraun, die Glieder 3—7 und die proximale Hälfte des 8. gelblichweiß, manchmal auch auf den Spitzen bräunlich; sie variieren in der Färbung bedeutend, sodaß Flor die 4 letzten und noch die Spitze des 6. ganz schwarz fand.

Thorax: Grund gelblichweiß, lichtbraun, licht rotbräunlich, Zeichnung schwarzbraun bis gänzlich schwarz, ausgedehnt, sodaß der Thorax gänzlich schwarz wird.

Vorderflügel. — 3 *mm* lang, 1·20 *mm* die größte Breite. — Flügelende zugespitzt abgerundet, Gipfel im Rande *cell.* $M1+2$ nahe der Insertion der $M1+2$; die vordere Hälfte des Bogens nur um ein wenig mehr gebogen als die hintere. — Adern: *Rs* lang, wellenförmig, das mittlere Drittel leicht nach vorne gebogen, er endigt ober dem Anfang des äußeren Drittels der $M1+2$ und vor der Insertion der $M3+4$; *R* schmiegt sich mit seinem ersten Drittel der *M* eng an; *M* lang, ihr Gipfel im Ende des inneren Drittels der Länge; $M1+2$ nur ein wenig länger als $M3+4$, beide gerade; *Cu* leicht nach vorne konvex, *Cu*1 kreisbogenförmig. — Färbung: im ganzen sind die Adern lichtbraun, nur $R+M+Cu$, *R*, *A*2 ganz, und die inneren Teile von *M* und *Cu* sind schwarzbraun. — Flügelmembran: fein, wasserhell, manchmal leicht gelblich, bei der Flügelwurzel verschwommen bräunlich. — Membrandornen: Oberflächedornen bedecken alle Adernfelder vollständig, indem sie bis dicht an die Adern herantreten; es sind keine dornenfreien Streifen. Unterflächedornen sind nur in dem äußersten Teile der *cell. Rs* entwickelt; die Dornen selbst sind genügend groß, sie stehen auf 0·01 bis 0·02 *mm* in Dreiecken und Viererecken von einander. — Marginaldornen wie bei *urticae L.*

Hinterflügel wie bei *urticae L.*, innere Hälfte *A*2 und ein Teil anliegender Membran schwarz.

Beine licht weißlichgelb- licht gelblichrot, Enden der Tibien und die Schenkel bräunlich.

Abdomen schwarzbraun, bis ganz schwarz.

♂ Hinterende. — Genitalsegment nach unten, hinten gleichmäßig bogenförmig begrenzt, der obere Umriß fast gerade, 0·20 *mm* hoch und ebenso breit, zerstreut behaart, braunschwarz. — Kopulationszange: der einzelne Ast von der Seite 0·22 *mm* hoch, bei der Basis am breitesten d. i. 0·06 *mm*, dann allmählich, gegen die nach vorne und unten gekrümmte Spitze, verschmälert und umgekehrt S-förmig; bei gewissen Stellungen der Zange, (also nicht immer), sieht man am vorderen Umriße in der Mitte der Höhe (Bauch des unteren S-Halbkreises), einen bis scharfwinkligen Lappen, der bei der Rückansicht der Zange ganz deutlich in der Mitte der Höhe als dreieckförmige Erweiterung des inneren Umrißes zu sehen ist; bei derselben Ansicht von hinten ist der untere Teil der Zange sehr breit, am äußeren Umriß nach außen konvex gebogen, am inneren konvex ausgeschweift, die obere Hälfte ist sehr dünn, schmal, leicht nach außen gebogen, stark chitinisiert, oben gerade abgestutzt, hinten rechtwinklig, vorne in einen kurzen spitzigen Zahn ausgezogen; der äußere Umriß der ganzen Zange ist Lyra-förmig, der innere beinahe sanduhrförmig, aber die untere Hälfte ist länglich, scharf elliptisch. Von oben sind Äste gerade abgestutzt, hinten rechtwinklig, vorne scharf ausgezogen. — Haare zerstreut, namentlich auf dem Lappen und den Umrißen länger und reichlicher; Färbung gelblichweiß, der obere dünne Teil stark chitinisiert, schwarzbraun. — Analsegment 0·20 *mm* hoch, also in der Höhe der Zange gleich, d. h. niedrig, die Vorderseite nach vorne konvex, die Rückseite in der oberen Hälfte in einen schmalen, langen, leicht gebogenen, zum spitzen Ende gleichmäßig sich verschmälernden Lappen ausgezogen; seine Spitze hat noch einen kleinen, zungenartigen, hakenförmig gebogenen, hyalinen Anhang; Analring schmal, in der hinteren Hälfte frei; Haare namentlich am Lappen und der oberen Hälfte des Basalteiles reichlich; Farbe braunschwarz.

♀ Körperende. — Analsegment von oben, kurz keilförmig, um den Anus genug breit, das Ende von den Seiten kurz, schräg abgestutzt. — Von der Seite, 0·45 *mm* lang, Breite des Basalteiles 0·25 *mm*, der obere Umriß vom Anus zur breit abgerundeten Spitze schief herabfallend, unter dem Anus schwach konvex, dann schwach konkav, Schnabel nicht abgesetzt, der untere Umriß gerade, eher schwach nach unten konkav; der Teil um die vordere Hälfte des

Drüsenringes nicht genügend chitinisiert; nur spärliche Haare unter der hinteren Hälfte auf dem Basalteile, einige längere und kürzere unter dem oberen Umriße, die Spitze ziemlich dicht behaart; Vorderteil schwarz, Mitte weißlichgelb, das Ende braun. — Genitalsegment oben in der Mitte schwach konvex 0·25 *mm*, unten: vordere Hälfte gerade, hintere konvex 0·17 *mm*, vorn konvex 0·27 *mm*; die Spitze kurz zugespitzt, nach oben gerichtet; starke lange Haare auf der ganzen Oberfläche des Segmentes, namentlich große sind unter dem eberen Umriße und auf der Spitze; vollkommen schwarz. — Äußere Legescheiden reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes, sind nach hinten abgerundet auf der Oberseite länglich geritzt. — Äußerer Legestachel: das Endstück schmal, gerade, stark chitinisiert, das Ende scharfspitzig, oben mit zwei scharf dreieckförmigen Zähnen von denen der hintere bedeutend größer ist; der Körper breit, die Leiste im oberen Drittel, Oberteil sehr fein kariert, Unterteil mit winzigen Dornen besetzt. — Der innere Legestachel hat das Ende kurz, dreieckbeilförmig, die Leiste am unteren Umriße, ein abgestutztes Ende und einen kleinen Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren, die ich im Spindelmühle, Böhmen 1. IX. 96 auf Alchemilla, wo gleichzeitig auch Larven saßen, gefangen habe, verfertigt.

Körpergröße: 3·50 *mm*.

Nährpflanze: Alchemilla vulgaris L. (Loew 87).

Lebensweise: sie überwintert; die Larven sitzen meist auf der Unterseite, selten auf der Oberseite der Blätter, die Entwicklung der Imagines trifft in die Zeit vom Juli bis in den Herbst.

Larven: sind erst 87 vom Loew beschrieben worden.

Geographische Verbreitung: Gallia, Helvetia, Germania, Austria, Hungaria, Suecia, Rossia (Lapponia, Fennia, Sibiria).

Böhmen: Duda (1892); coll. Duda, Mus. Reg. Boh.: loc.? leg.?; Spindelmühle auf Alchemilla 1. IX. 96, Königinhof a. E. 1896. lg. Šulc.

Literatur und Synonymie.

acutipennis (Chermes), Zetterstedt J. W., Fauna Ins. Lapp. 1828.
„ idem, Insecta lapponica, Lipsiae, 1840.
femoralis Trioza, Foerster A., Psylloden, 1848.
„ Flor G., Rhynchota Livlands, Dorpat, 1861.
„ idem, Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva, 1861.
„ Meyer-Duer, Psylloden, Schaffhausen, Mit. Schw. Ges., 1871.
„ Lethierry, Catalogue, Lille, 1874.

alpestris, Loew F., Zur Biologie und Syn. d. Psylloden, W. z. b. Ges. 1881.
„ idem, Katalog der Psylliden, W. ent. Ztg. 1882.
„ idem, Revision der pal. Psylloden, W. z. b. Ges. 1882.
acutipennis, idem, eodem.
„ idem, Übersicht der Psylliden, von Oest. Ung., eodem, 1888.
„ Thomson, Opusc. entom. Lund. 1869, recte 1878.
„ Reuter M. O., Catalogus Psyllodearum Fenniae, 1877.
„ idem, Sveriges Psylloder, Ent. Tidskr., 1880.
„ idem, Nya bidrag till Abo etc. Hemipter-fauna. Soc. p. f. f. fenn. 1880.
„ Horváth G., A magyarországi Psyllidákról, Budapest, 1885.
„ Duda L., Hmyz polokřídlý v Čechách žijící. Pragae, 1892.
„ Puton, Catalogue, Caën, 1899.
„ Ošanin B., Verzeichnis, Petersburg 1907.

---

3. **Trioza albiventris.** Foerster Flor 1848, 1861.

Kopf. — Scheitel hinten mäßig ausgeschniten, 0.35 *mm* breit, 0·15 *mm* in der Mittellinie lang, die hinteren Ecken abgestutzt abgerundet, die vorderen breit abgerundet; die hinteren Punktaugen ein wenig vorgerückt. — Fühler 1 *mm* lang; Sinnesgruben ganz wie bei *urticae L.* Stirnkegel kürzer als die Mittellinie des Scheitels, nur 0·10 *mm* lang, wenig divergierend, von breiter Basis allmählich verschmälert, an der Spitze abgerundet, zerstreut behaart. — Färbung: Grund rotgelb, Zeichnung sienabraun bis schwarzbraun, entweder wenig ausgedehnt, fleckenförmig, oder so ausgebreitet, daß der ganze Scheitel einförmig schwarz ist; Fühlerbecher schwarz; Fühler: die ersten drei Glieder gelblichweiß, die übrigen schwarzbraun, bis gänzlich schwarz.

Thorax: dem Scheitel gleich gefärbt.

Vorderflügel: Länge 3 *mm*, 1·10 *mm* die größte Breite, am Anfang des äußeren Drittels. — Flügelende: scharfspitzig, der Flügelgipfel liegt am Ende des vorderen Viertels des Randes der *cell. M*1 + 2; der vordere Bogen mehr gebogen als der hintere. — Flügeladern: *Rs* leicht wellenförmig, sein Ende fällt über das Ende des inneren Drittels der *M*1 + 2 und vor die Insertionsstelle der *M*3 + 4; der Anfang des *R* schmiegt sich der *M* eng an; *M* lang, der Gipfel ihres Bogens kommt in das Ende des inneren Drittels; *M*1 + 2 ein wenig länger als *M*3 + 4, beide gerade; Bogen der *Cu*1 kreisförmig. Farbe der Adern weißlichgelb, Rippen ungefärbt. — Flügelmembran vollkommen wasserhell. — Dornen: Oberflächedornen in allen Zellen, bei Wahrung von ziemlich breiten,

gleichmäßigen, dornenfreien Streifen, die den Adern entlang laufen vorhanden und zwar in den *cell. Rs, M,* $M1+2$, $M3+4$, und *Cu*; die Streifen sind auch neben den Randadern entwickelt, bei den marginalen Dornengruppen (Nervenstrichen Loew) sind die Oberflächedornenfelder herzförmig eingeschnitten; in den *cell. Rs* und $C+Sc$ sind die Dornenfelder abortiv, manchmal verchwindend klein; die Dornen selbst stehen auf 0·01—0·02 *mm* von einander in ziemlich regelmäßigen Dreiecken und Vierecken. — Marginalgruppen wie bei *urticae L.*

Hinterflügel wie bei *urticae L.*

Beine gelblich, bis ganz schwarz, mit allen möglichen Übergängen.

Abdomen oben ganz schwarz, unten gelblichweiß, oft mit grünlichem Anfluge.

♂ Körperende. — Genitalsegment 0·24 *mm* hoch, 0·22 *mm* lang, nach hinten und unten kreisbogenförmig, die Partie unter der Ansaatzstelle der Zange ausgeschweift, die vordere Hälfte des oberen Umrißes stark bogenförmig nach oben erweitert; Haare gleichmäßig zerstreut, spärlich, schwarzbraun, hinten oben lichter. — Zange: von der Seite ähnelt dem Umriße eines Schwahnes, der mit dem gestreckten Halse nach vorn gewendet ist, sie ist unten breit, nach hinten lappenförmig erweitert, die obere Hälfte ist rasch verschmälert, schmal, das Ende sichelförmig nach vorn und unter gebogen; die Zange pflegt sehr schräg nach vorn geneigt zu sein, ihre Längsache ist 0·15 *mm* lang; von hinten ist der äußere Umriß Lyraförmig, unten ist die Zange jederseits in einen fast kreisrunden, etwa dreiseitigen, nach hinten vorspringenden Lappen erweitert (dieses gilt von den frischen Tieren, bei den trockenen sind die oberen, schmalen Teile der Zange öfters gerade und aneinander liegend); das Ende ist sichelförmig nach außen und vorn gebogen. — Ziemlich lange Haare am vorderen, hinteren Umriße und am Lappen. — Gelblichbraun, bis schwarzgelb, der Lappen ist heller. — Analsegment: 0·15 *mm* hoch, 0·14 *mm* breit, also ziemlich niedrig und breit, das obere hintere Ende des Basalteiles ist allmählich verschmälert, nach oben und sogar ein wenig nach vorn gebogen; Analring 0·10 *mm* lang, schmal, nur mit seinem ersten Viertel mit dem Basalteile verwachsen. Haare namentlich in der oberen Hälfte ziemlich dicht und lang. — Farbe schwarzbraun.

♀ Körperende. — Analsegment von oben kurz, breit, keilförmig, das Ende ist kurz seitlich abgestutzt, die Spitze

kurz abgesetzt und abgerundet. — Von der Seite auf den Präparaten 0·39 *mm* lang, 0·20 *mm* im D. breit, der obere Umriß unter dem Ende des Anus bogenförmig gewölbt, glatt, rasch zur abgesetzten und stumpf abgerundeten Spitze herabfallend, mit dem unteren Umriße fast einen rechten Winkel bildend, die vordere Hälfte des unteren Umrißes spitzlappenförmig nach unten ausgezogen, die schmale Partie vor dem vorderen Ende des Anus ist wie die übrigen Teile des Segmentes stark chitinisiert und mit denselben im Zusammenhange. — Haare: gleichmäßig verteilt, ziemlich lang, aber nur in der hinteren Hälfte des Segmentes; um den Anus ein Ring von kleinen Haaren. — Keine Dornengruppen, wie wir sie bei den *Psylla* — Arten antreffen; Färbung ganz schwarzbraun. — Anus 0·15 *mm* lang, ringsum ein geschlossener Chitinring mit zweireihigen Drüsenöffnungen. — Genitalsegment: dreieckförmig, obere Seite nach oben gewölbt, 0·30 *mm* lang, untere nach unten gewölbt, 0·20 *mm* lang, vordere 0·25 *mm* lang, in der Mitte nach vorn kurz stumpfwinklig ausgezogen. Segmentspitze fast rechtwinklig, scharf. Haare besetzen ein Dreieck, dessen Basis die hintere Hälfte des unteren Umrisses bildet, und dessen Gipfel unter dem oberen Umrisse am Ende des vorderen Drittels gelegen ist. Es finden sich keine Dornen vor. — Färbung: weißlichgelb, die Spitze und Basis rotbraun bis schwarzbraun. — Äußere Legescheiden nach hinten gleichmäßig abgerundet, um den hinteren Teil fein länglich geritzt, reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes. — Äußerer Legestachel: der Körper genügend breit, untere Partie nur gerunzelt, unter dem oberen Rande eine gerade Leiste, die bis zum Ende reicht; das Ende rasch verschmälert, stark chitinisiert, oben gerade, in der hinteren Hälfte von vorn unten nach hinten oben schräg abgestutz, die Spitze scharf, oben mit zwei dreieckförmigen Zähnen. — Innerer Legestachel: der Endteil dreieckig beilförmig, das Ende abgestutzt, Leiste am unteren Rande, ein kleiner Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren, die in Schlesien (Teschner Kreis) Michalkowitz, auf den Weiden geschöpft wurden, angefertigt.

Körpergröße 3·50 *mm*, gemessen vom Kopfe zum Ende der zusammengelegten Flügel.

Nährpflanze: Salices: alba L., amygdalina L., fragilis L. Russeliana Sm. u. a.

Lebensweise. Die Larven leben auf den Blättern und verwandeln sich vom August an zu Imagines, welche überwintern.

Larven: wurden von F. Loew 1879 beschrieben.

Vorkommen: überall, häufig.

Geographische Verbreitung: ganz Europa.

Böhmen: Duda (1892); coll. Duda, Mus. R. Boh.: Prag, Neuhaus, lg. Duda; Prag, Königinhof a. E., lg. Šulc.

Literatur und Synonymie.

albiventris, Foerster A., Psylloden 1848.
sanguinosa, idem, eodem.
vitripennis, idem, eodem.
albiventris, Flor, Rhynchota Livlands, Dorpat, 1861.
„ idem, Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva, 1861.
„ Meyer-Duer, Psylloden, Schaffhausen, 1871.
sanguinosa, idem, eodem.
vitripennis, idem, eodem.
albiventris, Lethierry, Catalogue d. Hém. d. dep. d. Nord., Lille, 1874.
„ Scott J., Monograph, Brit. Psyllidae, Trans. Ent. Soc. London, 1876.
hypoleuca, Thomson, Opuscula ent. Lund, 1878.
albiventris, Reuter M. O. Sveriges Psylloder, Ent. Tidskr. 1880.
„ Loew F. Mitteilungen über Psylloden, W. z. b. Ges. 1879.
„ idem, Katalog der pal. Psylliden, W. ent. Ztg. 1882.
„ idem, Revision der pal. Psylloden, W. z. b. Ges. 1882.
„ idem, Jugendstadien der Psylloden, eodem; 1884.
„ idem, Übersicht der Psylloden von Oest. Ung. 1888.
„ Horváth G., A magyarországi Psyllidákról. Budapest, 1885.
„ Duda L., Hmyz polokřídlý v Čechách žijící, Pragae, 1892.
„ Edwards, The Hom. Hem. of. Brit. Islands. London, 1894.
„ Puton, Catalogue, Caën, 1899.
„ Ošanin B., Verzeichnis, Petrsburg, 1907.

---

4. **Trioza rhamni** SCHR. 1801, autorum.

Kopf. — Scheitel hinten schwach ausgeschnitten, 0·33 *mm* breit, 0·20 *mm* in der Mittellinie lang, die hinteren Punktaugen in den hinteren Ecken, die vorderen Ecken breit abgerundet. — Fühler nur 0·50 — 0·60 *mm* lang, fadenförmig, die letzten 2 Glieder deutlich verdickt; Sinnesgruben wie bei *urticae* L. — Stirnkegel nur 0·13 *mm* lang, von breiter Basis allmählich verschmälert, Gipfel schmal, abgerundet, dicht behaart. — Färbung: Scheitel schwarz, die Außenränder schmal, gelb (gewöhnlich bei den ♂♂) bis rotbraun (gewöhnlich bei ♀♀); Fühler braungelblich die Glieder am Ende bräunlich, die letzten 2 Glieder vollkommen schwarz; Stirnkegel schwarzbraun, stellenweise blässer.

Thorax schwarzbraun, die Ränder gelbrot (gewöhnlich bei ♀♀), bis rotbraun (gewöhnlich bei ♂♂). Brustrücken dicht bläulichweiß wachsartig bereift.

Vorderflügel 2·30 *mm* — 2·80 *mm* lang, zu diesem Verhältnis 0·92 und 1·06 *mm* breit. — Flügelende scharf zugespitzt, Gipfel im Ende des vorderen Drittels des Randes *cell.* $M1 + 2$; die vordere Hälfte des Flügelbogens mehr gebogen als die hintere. — Adern: *Rs* lang, in seiner äußeren Hälfte deutlich nach vorne konvex, sehr dem *margo. stig.* $+ R1$ genähert und beinahe mit ihm parallel verlaufend, sein Ende über der Hälfte der $M1 + 2$ und über der marginalen Insertion der $M3 + 4$; *R* schmiegt sich mit seinem Anfang der *M* nicht an; *M* sehr lang, Gipfel des Bogens in der Mitte des zweiten Viertels; $M1 + 2$ bedeutend länger als $M3 + 4$, recht schräg nach vorne und außen gerichtet; *Cu* gerade, *Cu*1 kreisbogenförmig. — Färbung: die Adern sind blaß, kurze Enden von *Rs*, $M1 + 2$, $M3 + 4$, *Cu*1, *Cu*2, den Marginalgruppen angrenzende Teile des äußeren Randes, die vordere Hälfte von *R*, *R*1, und das innere Drittel von *Rs*, der Anfang der *A*2, öfters bräunlich und ein deutlicher kurzer Längsstrich in der Mitte der *A*2 schwarz; die Rippen sind nur hie und da deutlich z. B. auf dem inneren Drittel der *M*. — Flügelmembran wasserhell. — Membrandornen: Oberflächedornen bedecken alle Zellen; überall sind genügend breite dornenfreie Streifen vorhanden; in dem äußeren Drittel der *cell.* *R*1 ist die Dornengruppe abortiv; dem Außenrande der *cell.* *Rs* entlang ein dornenfreier Streifen; in den *cell.* $M1 + 2$, *M* und *Cu*1 erreichen die Dornenfelder die oberen Drittel der Marginalgruppen, wo sie herzförmig eingeschnitten sind, einen breiten Streifen, den Margines entlang, freilassend. — Es sind keine Unterflächedornen. — Marginalgruppen wie bei *urticae* L.

Hinterflügel wie bei *urticae* L.

Beine schmutziggelb, Schenkel gebräunt, bis dunkelbraun.

Abdomen bisweilen ganz schwarz, in der Regel jedoch an den schmalen Hinterrändern der einzelnen Segmente und die Verbindungsmembran gelblichrot, oder hochrot; alle Tergite sind mit Klumpen weißen, festen Wachses bedeckt; die Unterseite des Abdomens dicht bläulichweiß bereift.

♂ Körperende. — Genitalsegment nach unten hinten gleichmäßig flach bogenförmig begrenzt, ziemlich lang, zerstreut behaart, schwarzbraun, 0·15 *mm* hoch, 0·17 *mm* lang. — Kopulationszange: der einzelne Ast von der Seite 0·13 *mm* hoch, gerade,

im ganzen Verlaufe 0·05 *mm* gleich breit, der vordere und hintere Umriß gerade und parallel verlaufend, das Ende gerade abgestutzt, die vordere Ecke breit abgerundet, die hintere in eine kurze gerade abgestutzte Zacke endigend; von oben: hinten sind die Äste fast gerade, vorn rasch verschmälert, sodaß hier bei geschlossener Zange eine tiefe kreisbogenförmige Einbuchtung entsteht; das Ende der Äste endigt in eine kurz ausgezogene, abgestutzte, innerlich leicht ausgeschweifte Zacke, deren vorderer Zahn stumpfspitzig, der hintere abgerundet ist; von hinten sind die Äste gerade stehend, an der Basis am breitesten, gegen den Gipfel allmählich gleichmäßig verschmälert, das letzte Drittel gegen die Mittellinie gleichmäßig gebogen; der äußere Umriß bildet ein umgekehrtes U, der innere eine gleichmäßige, oben und unten zugespitzte Ellipse. Haare gleichmäßig zerstreut, am hinteren Umriß am längsten. — Farbe licht gelbbraun. — Analsegment 0·20 *mm* hoch, nach vorne nur leicht konvex nach hinten breit abgerundet, lappenförmig erweitert, die größte Breite 0·13 *mm*; Haare sehr lang, namentlich in der oberen Hälfte und oben am hinteren Umriß. — Analring 0·10 *mm* lang, schmal, in der hinteren Hälfte frei, nicht mit dem Basalteile verwachsen. Farbe schwarzbraun, ein schmaler hinterer Saum entweder gelblich oder rötlichbraun.

♀ Körperende. — Analsegment von oben länglich keilförmig, das Ende spitzig, von den Seiten kurz abgestutzt. Von der Seite auf den montierten Präparaten 0·48 *mm* lang, 0·13 *mm* breit; der obere Umriß allmählich nach hinten herabfallend, unter dem Anus nur ein wenig konvex, im allgemeinen fast gerade, der Schnabel nimmt cca. das letzte Drittel der Länge ein, hat glatten Kiel, abgerundete Spitze, geraden Unterrand und ziemlich tiefen Basaleinschnitt. Haare: um den Anus ein Kranz von kleinen Haaren, das vorderste Viertel des Segmentes unbehaart, die mittlere obere Hälfte mit zerstreuten kürzeren Haaren, auf dem Buckelorte sind die Haare länger; der Schnabel ziemlich dicht unter dem Kiel und über dem Unterrande behaart; das Ende ringsum behaart. — Es sind keine Dornen vorhanden. — Die halbringförmige Partie um den Anus schwächer chitinisiert; braunschwarz. — Anus 0·14 *mm* lang, ringsum ein geschlossener, elliptischer Ring mit zweireihigen Drüsenöffnungen. — Genitalsegment von der Seite dreieckförmig, obere Länge leicht konkav 0·40 *mm*, untere 0·45 *mm* leicht konvex, vordere 0·30 *mm*, fast gerade nur kaum merklich stumpfwinklig; die ganze Oberfläche mit ziemlich langen, gleichmäßig zerstreuten

Haaren bedeckt, unter der hinteren Hälfte des oberen Umrisses sind die Haare länger; das Ende des Segmentes ziemlich allmählich ausgezogen, spitzwinklig. — Äußere Scheiden reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes, sie sind nach hinten breit abgerundet, im oberen Drittel fein, länglich geritzt; braunschwarz. — Äußerer Legestachel: der Körper ziemlich breit, die Leiste im oberen Drittel; der Oberleistenteil fein kariert, der Unterleistenteil fein, länglich wellenförmig geritzt; das Endstück schmal, nach oben gebogen, stark chitinisiert, das Ende scharfspitzig, oben mit zwei kleinen, dreieckförmigen, scharfen Zähnchen, unten gleichfalls zwei Zähne, von denen der vordere dreieckförmig und glatt, der hintere auf dem Rücken unregelmäßig sägeförmig ist. — Innerer Legestachel: das Endstück ist kurz dreieckförmig, das Ende scharfspitzig, unten Leiste, der Oberrand stärker chitinisiert.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren die in Böhmen Königinhof a. E. 1. VI. 04. auf Rhamnus cathartica gefangen wurden, angefertigt.

Körpergröße: 2·25 — 2·80 *mm,* gemessen bis zum Ende der geschlossenen Flügel.

Nährpflanze: Rhamnus cathartica L.

Lebensweise: die Larven erscheinen im Frühjahr, sie leben auf den Blättern, verwandeln sich von Juni an zu Imagines und überwintern als solche.

Larven: sind von Loew 1876 beschrieben worden, und werden auch von Sschrank 1801 erwähnt.

Vorkomen: überall und häufig.

Geographische Verbreitung: Britannia, Gallia, Helvetia, Germania, Austria, Hungaria, Rossia (Livonia).

Böhmen: Duda (1892); Mus. R. Boh., coll. Duda: Prag 24. V. 88. leg. Duda; Prag, Königinhof a. E. leg. Šulc.

Literatur und Synonymie.

rhamni (Chermes), Schrank, Fauna bioca, Nürnberg, 1801.
abieticola, Foerster A., Psylloden, 1848.
„ Flor G., Rhynchota Livlands, Dorpat, 1861.
„ idem, Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva, 1861.
„ Meyer-Duer, Psylloden, 1871.
argyrea, idem, eodem, 1871.
abieticola, Reuter M. O. Catalogus Psyllodearum Fenniae, Fauna-flora fenn. 1877.
rhamni, Loew F., Zur Biologie u. Char. d. Psylloden. W. z. b. Ges. 1876.
„ idem, On the identity of Tr. abieticola, with Ch. rhamni. Ent. M. Mag. 1877.

rhamni, idem, Katalog der pal. Psylliden. W. ent. Ztg. 1882.
„ idem, Revision der pal. Psylloden, V. W. z. b. G., 1882.
„ idem, Jugendstadien der Psylloden, eodem 1884.
„ idem, Übersicht der Psylliden von Oest. Ung. eodem 1888.
„ Horváth G., A magyarországi Psyllidákról. Budapest 1885.
„ Duda L., Hmyz polokřídlý v Čechách žijící, Pragae 1892.
„ Edwards, The Hem. Hom. of Brit. Islands. London, 1894.
„ Puton, Catalogue, Caën, 1889.
„ Ošanin B. Verzeichnis. Petrsburg. 1907.

---

5. **Trioza galii** Foerster-Flor. 1848.

Kopf. — Scheitel hinten mäßig ausgeschnitten, 0·15 *mm* breit, 6·15 *mm* in der Mittellinie lang, die Hinterecken abgestutzt, je ein Punktauge tragend, die Vorderecken breit abgerundet. — Fühler 0·70 *mm* lang, Sinnesgruben kreisförmig nur 0·006 *mm* i. D., ihre Zahl und Lage wie bei *urticae L.* — Stirnkegel: ziemlich, kurz, nur 0·09 *mm* lang, von breiter Basis rasch zugespitzt, Spitze scharf, äußerst wenig divergierend, behaart. — Färbung: Scheitel ganz dunkel, rotbraun, braunschwarz, Fühlerbecher und Stirnkegel braunschwarz, Fühler schwarzbraun, die Spitze des 2. Gliedes, Glied und eventuell auch Basis des Gliedes 4 gelblichweiß.

Thorax schwarzbraun, die Spitzen des Mesothorax und Metathorax rötlichbraun, die Leisten des Meso- und Metathorax weißlichgelb.

Vorderflügel 1·75 *mm* lang, 0·75 *mm* breit, also ziemlich kurz und breit. — Flügelende: ziemich scharfeckig, die Spitze abgerundet, der Flügelgipfel liegt am Ende des vorderen Drittels des Außenrandes von cell. $M1+2$; die vordere Hälfte des Bogens bedeutend mehr gebogen als die hintere, die beinahe flach erscheint. — Flügeladern: *Rs* kurz, gleichmäßig nach hinten gebogen, endigt vor der Zweigung $M1+2$, $M3+4$ (ev. ober der Insertion der *Cu* 1), *M* ziemlich lang, $M1+2$, $M3+4$ ziemlich kurz, fast gleich lang, *Cu* 1 kreisbogenförmig. — Farbe der Adern licht bräunlichrot, $C+Sc$, *R*, *R* 1 können dunkler werden, die Rippen nicht gefärbt. — Flügelmembran: wasserhell oder deutlich weingelb, namentlich in der äußeren Hälfte der Flügel, die dornenfreien Streifen können ungefärbt bleiben. — Membrandornen: Oberflächedornen bedecken die Membran in allen Zellen; überall, nach dem Außenrande der *cell. Rs* entlang, sind dornenfreie, gleichmäßig breite Streifen entwickelt; die Dornenfläche in der *cell.* $C+Sc$ ist in der inneren Hälfte rasch verschmä-

lert, in *cell. Cu* reichen die Dornen bis dicht zu den zwei inneren Dritteln der $R + M + Cu$; in den *cell.* $M 1 + 2$, *M* und *Cu* 1 sind die Dornenfelder gegen die Ränder bedeutend seitlich schief abgeschnitten. Die Dornen stehen in ziemlich regelmäßigen Drei- und Vierecken, in der Mitte der *cell. M* sind sie dichter und nicht mehr so regelmäßig. Die Marginalgruppen niedriger und breiter als bei *urticae L.*, die Dornen selbst sind auch stärker als bei der letztgenannten Art. — *Cell. R* 1 gegen das Ende von vorn und von hinten gleichmäßig verschmälert, anfangs sehr breit.

Hinterflügel: ist in Form und Nervatur wie bei *urticae L.* beschaffen.

Beine: gelblichweiß, die Hüften bis ganz schwarz.

Abdomen: die Segmentplatten rot bis schwarzbraun, Verbindungsmembran licht rotbraun, licht rot.

♂ Körperende. — Genitalsegment 0·15 *mm* hoch und ebenso lang, nach unten und hinten gleichmäßig flachbogenförmig begrenzt, die vordere Hälfte des oberen Umrisses stark kugelförmig vorgewölbt, die obere Vorderecke mit einem kleinen Haken (Muskelansatz?); unregelmäßige Behaarung, schwarzbraune Farbe. — Kopulationszange: von der Seite gesehen, breit (0·05 *mm*), niedrig (0·12 *mm*), schuppenförmig, der Vorderrand gerade, der Hinterrand unten nach hinten ausgebuchtet, das Ende von vorn nach hinten breit abgerundet, die Hinterecke in einen kleinen, 0·02 *mm* langen, stumpf abgerundeten Fortsatz ausgezogen; von oben läuft der Innenrad in einen Kiel, der nach hinten breiter wird und am Ende breit abgerundet ist, aus; von hinten: der einzelne Zangenast ist unten sehr breit, gegen die Mitte der Höhe allmählich, dann schnell in den schmalen, geraden Oberteil verschmälert, das Ende von außen nach oben und innen abgerundet, am inneren Umrisse mit zwei kurzen, scharfen dreieckigen Zähnchen, deren Zwischenraum glatt kreisrund ausgeschweift ist. Behaarung spärlich, am hinteren Rande sind die Haare länger und stärker. — Analsegment: 6·17 *mm* hoch, 0·12 *mm* breit (in KOH ausgekochtes Präparat), die obere, hintere Partie nach hinten bogenförmig ausgebreitet, die untere, hintere nach unten bedeutend schmäler, der Vorderrand nach vorn mäßig konvex; Analring weich, nicht chitinisiert und abgesetzt; reichlichere Behaarung in der oberen Hälfte, namentlich am Hinterrande; schwarzbraune Färbung.

♀ Körperende. — Analsegment: von oben gesehen sehr kurz keilförmig, um den Anus breit, dann rasch verschmälert, das Ende von den Seiten kurz abgestutzt, die Spitze abgerundet; von der

Seite 0·33 *mm* lang, 0·12 *mm* breit, die Partie um die vordere Hälfte des Anus nicht genügend chitinisiert; der obere Umriß nach hinten und unten ziemlich abschüßig, der Buckel sehr deutlich entwickelt, der Kiel des Schnabels glatt, nach oben gebogen, die Spitze breit, stumpf abgerundet, der untere Umriß fast gerade; einige kurze Spärliche Haare auf dem Basalteile, auf dem Buckel 3—4 lange Haare, über und unter denselben noch einige kleine. — Rotbraun bis ganz schwarzbraun, Spitze ein wenig lichter. — Genitalsegment: von der Seite länglich vierseitig, alle Seiten gerade, die obere hintere, und vordere untere à 0·25 *mm*, die vordere obere und untere hintere à 0·20 *mm*, das ganze Segment zerstreut, kurzhaarig, an der Spitze, die rechtwinklig ist und über dem oberen Umriße sind die Haare ein wenig länger. — Äußere Legescheiden nach hinten gleichmäßig abgerundet, an dem hinteren Teile fein länglich geritzt, sie reichen nur bis zum Ende des Genitalsegmentes. — Äußerer Legestachel: das Endstück allmählich nach hinten verschmälert, seine Achse nach oben leicht gebogen, das Ende oben und unten mit je zwei dreieckigen Zähnen, die Spitze scharf spitzwinklig. — Innerer Legestachel: hat das Ende kurz dreieckig, beilförmig, die Spitze stumpf abgestutzt; Leiste am unteren Umriße und ein kleiner Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren, die von Duda in Böhmen: Jindřichův Hradec, und von mir Michalkowitz, Tetschner Kreis, gefangen wurden, angefertigt.

Körpergröße 2·25 *mm* bis zum Ende der geschloßenen Flügel.

Nährpflanze: Galium austriacum, palustre, uliginosum, nach Hardy in Irland auch G. aparine und verum.

Larven: Loew schreibt, — unbekannt; ich weiß mich zu erinnern, die Beschreibung, die nach Loew's Tode veröffentlich wurde, gelesen zu haben; leider habe ich das Zitat verloren, und auswendig vermag ich den Artikel nicht zu zitieren. (Schweizerische Ent. Ges. ?)

Lebensweise: die Imagines sind vom Juni bis in den Herbst hinein zu finden; sie überwintern.

Vorkommen: überall, aber spärlich.

Geographische Verbreitung; ganz Europa.

Böhmen: Duda 1892; Mus. R. Boh., coll. Duda: Neuhaus Kysibl, lg. Duda.

Literatur und Synonymie.

galii, Foerster A., Psylloden 1848.
„ Flor G., Rhynchota Livlands, Dorpat, 1861.
„ Idem, Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva, 1861.
„ Meyer-Duer, Psylloden, Schaffhausen, 1871.
„ Lethierry, Cat. des Hém. d. dep. d. Nord., 1874.
„ Thomson, Opuscula entomologica, Lund 1878.
„ Scott J., Monograph Brit. Psyll., London, 1876.
„ Reuter M. O., Catalogus Psyllodearum Fenniae, Fauna-flora fennica, 1877.
„ Idem, Sveriges Psylloder, Ent. Tidscr. Stockholm 1880.
„ Loew F., Katalog der pal. Psylloden, W. ent. Ztg. 1882.
„ Idem, Revision der pal. Psylloden, W. z. b. Ges. 1882.
„ Idem, Uebersicht der Psylloden von Oest. Ung. eodem 1888.
„ Horváth G., A magyarországi Psyllidákról, Budapest 1885.
„ Duda L., Hmyz polokřídlý, v Čechách žijící, Pragae, 1892.
„ Edwards, The Hem. Hom. Brit. Islands, London, 1894.
„ Puton, Catalogue, Caën, 1899.
„ Ošanin B., Verzeichnis Petrsburg 1907.

---

6. **Trioza binotata** Loew 1883.

Kopf. — Scheitel hinten mäßig ausgeschnitten, 0·45 *mm* breit, 0·25 *mm* in der Mittellinie lang, die Hinterecken abgestutzt, je ein Punktauge tragend, die Vorderseite fast gerade mit dem Hinterrande parallel verlaufend, die Innen- und Außenecken jeder Scheitelhälfte abgerundet; dichte, lange Behaarung. — Fühler 0·95 *mm* lang; Sinnesgruben wie bei *urticae L.* — Stirnkegel 0·23 *mm* lang, von ziemlich schmaler Basis sehr allmählich, lang ausgezogen, sodaß sie eigentlich ungewöhnlich dünn und spitzig erscheinen; sie sind ziemlich stark abwärts geneigt, an der Basis weit von einander getrennt, nicht divergierend, sondern parallel verlaufend, dicht behaart. -- Färbung: Grund weißgelb, öfters mit grünlichem Anflug, Zeichnung nur in der Mitte des Scheitels, begrenzt, kommaartig, sepiabraun; Fühler weißgelb, Glied 1 braun, Glied 2 nur in der Basalhälfte braun. Glied 6 und 7 an der Spitze, Glied 8 ganz braun, Glieder 9 und 10 ganz braunschwarz (es sind leichte Varierungen in der Färbung zu beobachten); Klypeus schwarz.

Thorax: Grund weißlichgelb, Zeichnung rotbraun, braun begrenzt, deutlich entwickelt.

Vorderflügel 2·70 *mm* lang, 1·15 *mm* die größte Breite, in dem mittleren Drittel überall gleich breit. — Flügelende breit gleichmäßig von vorn und hinten abgerundet, die vordere Hälfte des

Bogens hat gleich langen Radius wie die hintere; Flügelgipfel gerade, in der Insertion der $M1+2$. — Adern: *Rs* im größten Teile seines Verlaufes leicht wellenförmig, fast gerade, das äußerste Viertel stark nach hinten konvex gebogen, das Ende über der Hälfte der $M1+2$ und über der Insertion der $M3+4$; *M* ziemlich lang, ihr Ende über der Insertion der *Cu* 1; $M1+2$ leicht gebogen mit der der $M3+4$ gleich lang; *Cu* 1 in der Innenhälfte kreisbogenförmig, die äußere Hälfte gerade. — Färbung der Adern: hellbräunlichgelb. *R*, Anfang und Ende des *Rs*, der *M*, ganze $M1+2$, $M3+4$, innere Hälfte des *Cu* schwarzbraun, der äußere Rand von der Insertion *Rs* bis zum Ende *sut. an.* bräunlich; auf den bräunlichen Adern die Rippen deutlich schwarzbraun gefärbt. — Flügelmembran waßerhell, in den *cell. R* 1, *Rs, M,* $M1+2$, *Cu* mit kaum merklichen, bräunlichen Längsschatten; diese nehmen die inneren 2/3 der Felder ein, und erreichen nicht die Randadern; in der *cel. Cu* ist der postsuturale Teil, mit Ausnahme des inneren Drittels in der Mitte des praesuturalen Teiles ein länglicher, bräunlicher Schatten, der am Ende der *sut. analis* verschwommen tief schwarzbraun wird. Bereich der Marginaldornen bräunlich. — Dornen: Oberflächedornen sind nur an den innersten 2/3 des postsuturalen Teiles, wahrnehmbar; eine unregelmäßige Gruppe von kleinen, scharfen Dornen nur auf der schwarzbraunen Stelle des praesuturalen Teiles der *cell. Cu.* Die übrigen Zellen sind vollkommen dornenfrei. — Marginaldornen wie bei *urticae L.*

Hinterflügel: Form und Adernverlauf wie bei *urticae L.* Färbung der Adern braunschwarz.

Beine samt den Hüften blaßgelb; alle Schenkel mit Ausnahme der Spitze und Basis, die Schienenspitzen, die Tarsen der Vorder-Mittelbeine und das letzte Tarsenglied der Hinterbeine schwarz.

Abdomen schwarz, die Hinterränder der Segmente oben und unten schmal, gelblich gesäumt, beim ♂ das letzte Segment ganz gelb; die Oberseite des Abdomens ist mit Flecken aus schneeweißem Sekrete geziert, von welchen auf dem ersten Segmente beiderseits von der Mitte je ein großer, runder, auf jedem der übrigen Segmente in der Mitte des Hinterrandes aber ein querer, länglich-ovaler vorhanden ist; die letzteren Flecken nehmen nach der Abdomenspitze hin an Größe zu. (Loew.)

♂ Körperende. — Genitalsegment von der Seite nach hinten und unten gleichmäßig flach bogenförmig begrenzt, die obere Seite flach, fast gerade, zerstreut behaart, gelbbraun, stellenweise schwarz-

braun. — Kopulatioszange, von der Seite gesehen, schmal, 0·06 *mm* breit, 0·25 *mm* hoch, gerade, die Hinterseite ganz gerade, die vordere leicht nach vorn konvex, das Ende von vorn nach hinten abgerundet; von oben sind die Enden der Zangenäste unten schmal, gegen das breit abgerundete Ende werden sie breiter; in der Höhe von 0·07 *mm*, von der Basis gerechnet, hebt sich von der sonst dicht mit kleinen, dichten Dornen besetzten Innenseite ein kurzer, breitbasiger Zahn, der wahrscheinlich der Rest eines degenerierten Ästchens ist; Behaarung ziemlich dicht, auf der Oberfläche kurz, auf dem hinteren Rande länger und dicht; Färbung braun. — Analsegment 0·25 *mm* hoch, 0·10 *mm* breit, die vordere Seite fast gerade, die hintere deutlich nach hinten konvex; Analring weich, nicht deutlich von dem Basalteile abgesetzt; Behaarung gleichmäßig dicht, auf der ganzen Oberfläche lang; Farbe schwarzbraun, das Ende gelblich.

♀ Körperende. — Analsegment von oben: der Basalteil um den Anus breit, dann eine rasche Verschmälerung in einen langen, dünnen spitzendigen Schnabel; von der Seite, auf den montierten Präparaten, beträgt die ganze Länge 0·66 *mm*; der hohe, 0·16 *mm*, breite, stark, unter dem Anus vorgewölbte Basalteil ist 0·33 *mm* lang, der Schnabel gleichfalls 0·33 *mm*; dieser ist an seiner Wurzel sattelförmig abgesetzt, schmal und trotzdem noch nach hinten gleichmäßig verschmälert, nach oben gebogen, das Ende spitzig, unten gerade, von oben nach unten verschmälert; der untere Umriß in der Mitte nach unten konvex; die Oberfläche ist deutlich länglich gefurcht; ein Ring kurzer, kleiner Haare um den Anus, reichliche, lange Haare auf Vorwölbung unter dem Anus, ganz kleine, kurze, spitzige Haare auf der ganzen Oberfläche des Schnabels. Die Partie vor dem Anus stark, wie die übrigen Teile des Segmentes chitinisiert, nicht abgeteilt, vorn unten zwei höckerförmige Wülste, die wahrscheinlich Muskelansatzstellen bedeuten. Färbung: der Basalteil gelblich, stellenweise bräunlich, der Schnabel schwarzbraun. — Anus 0·17 *mm* lang, breit, ringsum ein geschloßener Ring mit zweireihigen Drüsenöffnungen. — Genitalsegment: obere hintere Seite ein und halb S-wellenförmig, 0·35 *mm* lang, untere 0·25 *mm* lang gerade, vordere stark nach vorn konvex, 0·50 *mm*; die Spitze kurz, scharf, nach oben gerichtet; es sind keine Dornen vorhanden; die obere Hälfte des Segmentes spärlich mit langen Haaren bedeckt, an der Spitze sind die Haare sehr lang und dicht. — Äußere Scheiden haben breit abgerundete Basis, gegen das dünne Enddrittel sind sie allmählich bedeutend ve

lert, an der Spitze abgerundet, stark chitinisiert, bräunlich, nur die Ränder sind durchsichtiger, sie reichen weit über das Ende des Genitalsegmentes, bis nahe an das Ende des Analsegmentes. — Äußere Legestachel: gerade, dünn, stark chitinisiert, am oberen Umriße eine gerade Leiste; das Endstück nicht abgesetzt, oben vollständig gerade, von unten nach oben allmählich abgerundet, verschmälert, die Spitze scharf. — Innerer Legestachel: das Endstück vorn hoch, in der Mitte der Länge rasch verschmälert, das hintere Drittel schmal, das Ende abgerundet, schmale Leiste am Unterrande; ein winziger Nabel?

Diese Beschreibung wurde nach den Typen Loew's aus Tirol, Stubaithal, coll. k. k. Naturhistorisches Hofmuseum in Wien angefertigt; sie differiert stark in der Auffaßung des Analsegmentes des ♀ und des Legeapparates desselben von der Beschreibung Loew's; offenbar hat Loew den Schnabel als einen Bestandteil des letzteren aufgefaßt, was leicht an den trockenen Individuen geschehen kann und erst an den in KOH ausgekochten und in Glycerin montierten Präparaten in meinem Sinne korrigiert werden konnte.

Körpergröße: 3·20 *mm.*

Nährpflanze: Hippophaë rhamnoides L.

Lebensweise: die Larven leben zerstreut auf der Unterseite der Blätter, ohne eine Deformation zu verursachen. — Sie verwandeln sich vom September an zu Imagines, welche überwintern (Loew).

Larven sind von Loew beschrieben worden.

Vorkommen selten, nur aus einem Fundorte bekannt: Stubaithal, Tirolia, leg. Loew.

Geographishe Verbreitung Tirolia.

Literatur und Synonymie.

binotata, Loew F., Eine neue Trioza-Art, Wien. Ent. Ztg. Wien. 1883.
„ Idem, Jugendstadien der Psylliden, W. z. bot. Ges., 1884.
„ Idem, Uebersicht der Psylliden von Oest. Ung., eodem, 1886.
„ Puton, Catalogue des Hémiptères, Caën, 1899.
„ Ošanin B., Verzeichniss, Petrsburg, 1907.

---

7. **Trioza cerastii** H. Loew 1847.

Kopf. — Scheitel hinten gerade, 0·30 *mm* breit, in der Mittellinie 0·20 *mm,* Hinterecken abgestutzt, je ein Punktauge tragend, die Vorderecken breit abgerundet. — Fühler 0·70 *mm* lang, Sinnesgruben wie bei *urticae L.* — Stirnkegel 0·10 *mm* lang, von

breiter Basis zum Gipfel allmählich verschmälert, leicht divergierend, behaart. — Färbung: Scheitel, Fühlergruben grünlichgelb, Fühler gelblichweiß, die letzten 3 Glieder schwarzbraun; Klypaeus schwarz, stark erhaben, vorstehend.

Thorax oben gelb, bräunlichgelb oder schmutziggrün, ohne deutliche Striemen, bloß mit etwas dunkleren Flecken, an der Seite und unten mehr grünlichgelb; alle Einschnitte und Furchen desselben, besonders die der Unterseite mehr oder weniger geschwärzt.

Vorderflügel. — 2·45 *mm* lang, 1*mm* die größte Breite. — Ende breit abgerundet, der vordere und hintere Bogen gleich gebogen, Flügelgipfel in der Mündung der $M1+2$. — Flügeladern: *Marg. stigm.* $+ R1$ fast gerade, *Rs* nur leicht wellenförmig, er endigt über der Hälfte der $M1+2$ oder über der Insertion der $M3+4$, fast gerade, *M* lang, Gipfel des Bogens im Ende des Inneren Drittels der Länge, Anfang *R*1 der *M* nicht anliegend; $M1+2$, $M3+4$ gleich lang, fast gerade, *Cu*1 kreisbogenförmig. Färbung: gelblichweiß, stellenweise sind ganze Stücke bräunlich und zwar namentlich auf den Gipfeln der Aderbogen *Rs*, *M*, $M1+2$, *Cu*1 und am Rande der äußeren Flügelhälfte. — Flügelmembran gleichmäßig weingelb, (Loew schreibt auch wasserhell). Flügelmembrandornen: Oberflächedornen bedecken alle Felder; es sind überall gleichmäßig breite dornenfreie Streifen entwickelt, nur der $R+M+Cu$ in *cell. Cu* treten die Dornen dicht an; neben dem Rande *cell. Rs* ein dornenfreier Streifen; in den *cell.* $M1+2$, *M* und *Cu*1 sind die Dornenfelder gegen die Ränder schräg abgestutzt. — Die Dornen selbst sind deutlich, genügend groß, auf 0·01—0·02 *mm* in Drei- und Vierecken von einander stehend; Unterflächedornen sind nur in dem äußersten Teile der *cell Rs* entwickelt. — Marginaldornen wie bei *urticae L.*

Hinterflügel: wie bei *urticae L.*

Beine: grünlich oder gelblich, die Schenkel und Schienen mehr oder weniger bräunlich, alle Tarsen gebräunt.

Abdomen grün, mit blaßeren Segmenträndern und Verbindungsmembran; sowohl auf der Ober- als auch auf der Unterseite der Segmente mehr oder weniger deutliche bräunliche oder braune Binden.

♂ Körperende. — Genitalsegment von der Seite nach unten hinten gleichmäßig flachbogenförmig begrenzt, 0·20 *mm* hoch, 0·30 *mm* lang, zerstreut behaart, weißlichgelb. — Kopulationszange 0·16 *mm* hoch, 0·10 *mm* breit, der einzelne Ast ähnelt von der Seite einem Daumenhandschuhe, der mit dem Daumen nach vorn und oben gerichtet ist; das obere Drittel ist ein wenig verschmälert, am Ende

breit abgerundet; von hinten sehen wir den breiteren Teil von unten nach oben allmählich verschmälert, am Ende abgerundet; von der inneren Seite entspringt ein schmaler, dünner, etwas nach innen gebogener Fortsatz, der oben gerade abgestutzt und am vorderen und hinteren Ende kurz zahnförmig erweitert ist; dieser Fortsatz ist bei der Seitenansicht nicht sichtbar. — Von oben sehen wir ganz vorn den „Daumenfortsatz“, hinten das eigentliche „Handschuhende“, aus dessen Innenseite der innere schmale Fortsatz entspringt, der mit einer walzenförmigen Zacke endigt. — Haare regelmäßig zerstreut, Farbe grünlichgelb. — Analsegment gerade, der Vorderrand nach vorn konvex, der Hinterrand in der oberen Hälfte nach hinten lappenförmig ausgezogen, breit abgerundet; das Ende abgestutzt; die Haare reichlich auf der oberen Hälfte, namentlich am Hinterrande; Farbe weißlichgrün.

♀ Körperende. — Analsegment von oben gesehen, länglich keilförmig, das Ende von den Seiten abgestutzt; von der Seite, an den montierten Präparaten 0·52 *mm* lang, 0·15 *mm* breit, der obere Umriss unter dem Anus nach unten konvex, an der Buckelstelle lang, niedrig gewölbt, dann gegen die Spitze gerade; die letztere scharfeckig, der untere Umriß gerade, leicht wellenförmig, die Partie vor dem Anus oben schwächer chitinisiert; einige kurze Haare unter dem Anus, am Buckel, auf der Spitze und am Ende des unteren Umrißes; es finden sich keine Dornen; grünlichgelb. — Äußere Scheiden nach hinten breit abgerundet, reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes, sie sind an der unteren Hälfte mit kleinen Dornen besetzt. — Äußerer Legestachel: der Körper unten mit kleinen Dornen besetzt, das Endstück stark chitinisiert, das Ende scharfspitzig, oben mit zwei scharfen Zähnen, von denen der vordere größer ist, unten ebenfalls mit zwei Zähnen, von denen der hintere klein, beinahe rechtwinklig, der vordere groß und breit abgerundet ist; der untere hintere Zahn liegt unter dem oberen vorderen, der untere hintere noch weiter nach vorn. — Innerer Legestachel: hat das Ende kurz dreieckbeilförmig, Leiste auf dem unteren Umriße und einen winzigen Nabel. — Anus 0·20 *mm* i. l. D., ringsum ein geschloßener, länglich elliptischer Chitinring mit zweireihigen Drüsenöffnungen. — Genitalsegment: von der Seite dreieckförmig, oben 0·37 *mm*, unten 0·36 *mm*, vorn 0·30 *mm*. Das Ende ein wenig ausgezogen und nach oben gebogen, die ganze Seite zerstreut, reichlich behaart, einige längere Haare unter der hinteren Hälfte des oberen Umrißes; grünlichgelb.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren, die ich in Schlesien Michalkowitz, gefunden habe, angefertigt.

Körpergröße 2—3 *mm*.

Nährpflanze: Cerastium semidecandrum L. und triviale Link.

Lebensweise: die Imagines überwintern; die Larven bewirken eine Deformation ihrer Nährpflanze, welche darin besteht, daß die Internodien sich verkürzen, die Blätter und Blüten sich hiedurch zu Knäueln häufen, die Blüten in größerem oder geringerem Maße vergrünen die Blätter sich schalenförmig krümen und über einander lagern; die Imagines entwickeln sich vom Juni an (Loew).

Larven sind von H. Loew 47. und F. Loew 79. beschrieben worden.

Vorkommen überall, im Frühjahre immer auf den Koniferen zu finden.

Geographische Verbreitung: Gallia, Germania, Austro-Hungaria, Suecia, Rossia (Fennia).

Böhmen: Duda, Catalogus 1892; Mus. R. Boh., coll. Duda, Neuhaus 1887 leg. Duda; Königinhof a. E. im Frühjahre auf den Koniferen lg. Šulc.

Literatur und Synonymie.

cerastii (*Chermes*), Linné, Fauna svecica, Holmiae, 1761.
„ (*Psylla*), Loew H., Stett. ent. Ztg. VIII. 1847.
flavescens (*Trioza*,) Meyer-Duer, Psylloden, Schaffhausen, 1871.
cerastii „ Loew F.. Mitteilungen über Psylloden, W. z. b. Ges. 1879.
„ „ Idem, Katalog der pal. Psylliden, W. ent. Ztg 1882.
„ „ Idem, Revision der pal. Psylloden, W. z. b. Ges. 1882.
„ „ Idem, Jugendstadien der Psylliden, eodem, 1884.
„ „ Idem, Uebersicht der Psylliden von Oest. Ung. eodem 1888.
„ „ Reuter M. O., Sveriges Psylloder, Ent. Tidskr., Stockholm, 1880.
„ „ Idem, Nya bidrag till Abo och Alands Hemipter-fauna; Soc. pro fauna et fl. fenn. 1880.
„ „ Horváth G., A magyarországi Psyllidákról, Budapest 1885.
„ „ Duda L., Hmyz polokřídlý v Čechách žijící, Pragae, 1894.
„ „ Puton, Catalogue des Hémiptères, Caën, 1899.
„ „ Ošanin B., Verzeichnis, Petersburg, 1907.

---

8. **Trioza nigricornis** Flor 1861.

Kopf. — Scheitel hinten 0·37 *mm* breit, mäßig ausgeschnitten, in der Längslinie 0·17 *mm* lang, die abgestutzten Hinterecken mit Punktaugen, die Vorderecken breit abgerundet. — Fühler 0·90 *mm* lang, die Sinnesgruben (Zahl, Lage, Größe) ganz wie bei

urticae L.; Fühlerbecher sehr geräumig, bedecken, von oben gesehen, fast ganz die Stirnkegel. — Stirnkegel sehr kurz, rasch von breiter Basis zugespitzt mit konvexen Seiten, ziemlich nach hinten gerückt, sodaß sie von oben her nicht sichtbar sind und auf den ersten Blick zu fehlen scheinen. — Färbung: Scheitel bis ganz schwarz, eventuell nur schmal auf dem Vorderrande weiß gesäumt; Fühlerbecher, Fühler und Stirnkegel ganz schwarz.

Thorax. — Grundfarbe und äußere Ecken des Mesoscutum licht, rot, Zeichnung sehr ausgedehnt, bis zusammenfließend, schwarz.

Vorderfügel. — 2·50 *mm* lang, 0·90—1 *mm* die größte Breite. — Das Flügelende scharf stumpfwinklig, der Gipfel liegt am Ende des vorderen Drittels des Randes *cell.* $M1+2$; die vordere Hälfte des Endbogens fast kreisrund, die hintere weit flacher. — Adern: *Rs* in seiner Mitte deutlich nach vorn gebogen, sein Ende über der Insertion $M3+4$; *M* lang, ihr Gipfel am Ende des inneren Drittels, die äußere Hälfte fast gerade, $M1+2$ um etwas länger als $M3+4$, beide leicht gebogen, fast gerade, *Cu* 1 kreisbogenförmig; alle Adern blaßgelb, oder schwach bräunlich mit sehr feinen, fast undeutlichen Rippen, oder ohne dieselben; falls die Adern blaß sind, sind die Rippen nur auf $M1+2$, $M3+4$, *Cu* 1, *Cu* 2 und am Ende des *Rs* gefärbt, bei dunkleren Adern auch auf *M* und *Cu*. — Flügelmembran vollkommen wasserhell. — Membrandornen: Oberfläche- und Unterflächedornen fehlen vollständig. — Marginaldornen wie bei *urticae L.* licht bräunlich.

Hinterflügel: wie bei *urticae L.*

Beine: schwarz, mit gelblichen Knien.

Abdomen: ganz schwarz, Verbindungsmembran weißlichgelb.

♂ Körperende. — Genitalsegment nach unten und hinten ziemlich flachbogenförmig, die vordere Hälfte des oberen Umrißes hochgewölbt. Höhe 0·18 *mm*, Länge 0·16 *mm*, schwarz, nur der obere, hintere Teil unter dem Zangenansatze heller, die hintere Hälfte zerstreut behaart. — Kopulationszange: 0·13 *mm* hoch, 0·3 *mm* breit, der einzelne Ast von der Seite im ganzen sensenförmig, mit scharfer Spitze nach vorn und oben gerichtet, im ganzen Verlaufe beinahe gleich breit, oben bogenförmig abgestutzt, die hintere Ecke breit abgerundet, die vordere spitzig und ein wenig nach unten gebogen; von oben sehen wir den sensenförmigen Teil in entsprechender Pespektive, indem er mit der Spitze nach vorn, mit der Schärfe nach unten, mit dem stumpfen Rücken nach oben gerichtet ist. — Von hinten ist der äußere Umriß ein breit abgestuztes O, der innere

ein nach unten sehr scharfes O; es sind also die Äste in der unteren Hälfte an der Basis sehr breit, an dem inneren Umriße hoch, dreiecklappenförmig nach unten erweitert, im oberen Teile schmal und zur Mittellinie gleichmäßig gebogen; Farbe weißlichgelb, Haare zerstreut, reichlicher und länger auf dem Lappen. — Analsegment 0·15 *mm* hoch, Basalteil nach vorn leicht konvex, nach hinten breit lappenförmig verbreitet und breit abgerundet, im ganzen 0·18 *mm* breit; Analring 0·16 *mm* lang, schmal, nur mit der vordersten Partie mit dem Basalteile zusammenhängend; reichliche Haare namentlich auf der oberen Hälfte; Farbe schwarzbraun.

♀ Körperende. — Analsegment von oben breit und kurz keilförmig, das Ende von den Seiten abgestutzt, die kurze Spitze abgesetzt und ein wenig nach oben gehoben. — Von der Seite an den Präparaten kurz, nur 0·36 *mm* lang, 0·25 *mm* breit, eine bedeutende Partie vor dem Anus oben und seitlich ist nur schwach chitinisiert; der obere Umriß rasch nach hinten abschüssig, nur unbedeutend konvex, die Spitze kurz abgesetzt und ein wenig nach oben gehoben, der untere Umriß schwach, nach unten konvex, kein Schnabel. Nur spärliche Haare, von diesen einige längere auf der Buckelstelle; gelblichweiß das vordere Drittel und die kurze Spitze braun. — Anus 0·17 *mm* im l. D. lang, ringsum ein geschloßener Ring mit Drüsenöffnungen. — Genitalsegment: obere Seite leicht wellenförmig, 0·23 *mm* lang, untere nach unten schwach konvex, 0·17 *mm*, vordere nach vorn abgerundet, stumpfwinklig, kein Buckel, die Spitze scharfwinklig; gleichmäßig zerstreute genügend lange Haare auf den zwei hinteren Dritteln; ganz schwarzbraun. — Äußere Scheiden nach hinten gleichmäßig abgerundet, auf dem hinteren Teile fein länglich geritzt, sie reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes. — Äußerer Legestachel: das Ende schmal, stark chitinisiert, oben gerade, unten gegen das Ende von unten nach oben schräg abgestuzt, das Ende scharfspitzig, oben mit zwei dreieckförmigen scharfen Zähnen. — Innerer Legestachel: der Endteil länglich, meßerförmig, am unteren Umriß eine Leiste, das Ende abgestutzt abgerundet, ein kleiner Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach den Exemplaren aus Böhmen und zwar nach den ♂ gesammelt von Dr. Uzel 23. VII. 05. auf Beta in nächster Umgebung Prags, und nach den ♀ aus coll. Duda, jetzt Museum Regni Bohemiae, Prag leg.? loc?. angefertigt.

Körpergröße: bis 3 *mm*.

Nährpflanze: bisher unbekannt.

Lebensweise: sie überwintert, die neue Generation wurde im Juni geschöpft.

Larven: unbeschrieben.

Vorkommen: häufig.

Geographische Verbreitung: Europa sept. et med., Gallia, Germania, Austria, Hungaria, Suecia, Rossia, Livonia, Siberia Transcaucasia.

Böhmen: DUDA, Catalogus 1892; Mus. R. Boh., coll. DUDA, lg.? loc.?; Prag, Königgrätz, auf Zuckerrübe (Beta) lg. Dr. UZEL, coll. ŠULC. —

Literatur und Synonymie.

nigricornis, FOERSTER A., Psylloden 1848.
„ FLOR G., Rhynchota Livlands, Dorpat 1861.
„ Idem, Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva, 1861.
„ MEYER-DUER, Psylloden, Schaffhausen, 1871.
„ THOMSON, Opuscula Lund 1878.
„ REUTER M. O., Sveriges Psylloder, Ent. Tidskr. Stockholm 1880.
„ LOEW F., Katalog der pal. Psylliden. Wien. ent. Ztg. 1882.
„ Idem, Revision der pal. Psylloden, Wiener z. b. Ges. 1882.
„ Idem, Uebersicht der Psylliden von Oest. Ung. W. z. b. Ges. 1888.
„ HORVÁTH G., A magyarországi, Psyllidákról, Budapest 1885.
„ Idem, Hémiptères recueillis dans la Russie méridional et en Transcaucasie. (Revue d'Ent. XIII.) 1894.
„ DUDA L., Hmyz polokřídlý v Čechách žijící, Pragae 1892.
„ JAKOVLEV V. E., Homoptera okresnostěj Irkutstka; (Horae soc. ent. rossicae, XXV.).
„ PUTON, Catalogue, Caën, 1899.
„ OŠANIN B., Verzeichnis der Hemipteren, Petrsburg 1907.

---

9. **Trioza agrophila** LOEW 1888.

Kopf. — Scheitel 0·33 *mm* breit, 0·23 *mm* in der Mittellinie lang, hinten fast gerade, die hinteren Ecken abgestutzt, mit je einem Punktauge, die Vorderecken breit abgerundet. — Fühler 0·70 *mm* lang, Größe, Verteilung und Lage der Sinnesgruben, wie bei *urticae L.* — Stirnkegel ziemlich kurz, 0·13 *mm*, gleichmäßig von breiter Basis zum dünnen abgerundeten Ende verschmälert, behaart, ihre Längsachsen parallel, äusserst wenig divergierend. Färbung: der ganze Kopf hell grüngelb, nur die Fühler in der äußeren Hälfte (die zwei bis drei letzten Glieder) bräunlich, Augen braunschwarz, die Punktaugen hellrot.

Thorax: die Grundfarbe licht grünlichgelb, die Zeichnung ockergelb.

Vorderflügel 2·35 *mm* lang, 0·95 *mm* am breitesten am Anfang des äußeren Drittels. — Flügelende fast gleichmäßig abgerundet, Gipfel am äußeren Anfang des Randes der *cell.* $M1+2$, die vordere und hintere Hälfte des Bogens haben gleich langen Radius. — Adern: *Rs* beinahe gerade, verläuft in der Richtung: schräg nach vorn und außen, sein Ende fällt in den Anfang des zweiten $^1/_4$ der $M1+2$; *M* lang, mäßig gebogen, ihr Gipfel im Ende des inneren Drittels; $M1+2$, um ein wenig länger als $M3+4$, beide beinahe gerade, nur sehr schwach gebogen; *Cu*1 kreisbogenförmig. — Färbung der Adern: blaß, nur in der äußeren Hälfte des Flügels etwas gelblich, Rippen braun, und obzwar sehr fein, doch deutlich hervortretend. — Flügelmembran fein, waßerhell, mit leicht gelblichem Anflug. — Dornen: Oberflächedornen sind in allen Aderfeldern; gleichmäßige, genügend breite dornenfreie Streifen überall bis auf $C+Sc$ und die innere hintere Hälfte der $R+M+Cu$, wo die Dornen dicht an die Adern reichen; dem Rande der *cell. Rs* entlang, ein dornenfreier Streifen; an den Rändern der *cell.* $M1+2$, *M* und *Cu*1 sind die Dornengruppen seitlich schräg abgestutzt; die Gruppe in *cell.* $R1$ ist von außen her verkürzt, reicht nicht bis an das Ende der Zelle; die Dornen stehen in Drei- und Vierecken auf 0·02 *mm* vo einander, nur in *cell.* $C+Sc$ sind sie dichter. — Es finden sich keine Unterflächedornen vor. — Marginalgruppen wie bei *urticae L.*

Hinterflügel wie bei *urticae L.*

Beine grünlich.

Abdomen grünlichgelb.

♂ Körperende. — Genitalsegment nach unten und hinten gleichmäßig flachbogenförmig begrenzt, 0·25 *mm* lang, 0·12 *mm* hoch, auf den trockenen Exemplaren oben fast gerade, auf ausgekochten Präparaten ein wenig und gleichmäßig nach oben gewölbt, die vordere, obere Ecke mit einem hakenförmigen Anhang. — Behaarung spärlich, ziemlich lang. — Farbe licht grünlichgelb. — Kopulatioszange: von der Seite gesehen quadratförmig, 0·10 *mm* hoch und ebenso breit, vorgewölbt, die Seiten glatt, die vordere obere Ecke rechtwinklig, die hintere obere trägt einen 0·08 *mm* hohen, 0·02 *mm* im ganzen Verlaufe gleich breiten Ast, deßen Ende oben gerade abgestutzt und die Vorder- und Hinterecke in je einen kurzen Zahn ausgezogen ist; der hintere Zahn ist ein wenig größer; von hinten erscheint der untere quadratförmige Teil als ein hohes Dreieck,

deßen Spitze in den eben beschriebenen, schmalen, hohen Ast ausläuft; von oben sind die Ränder des unteren Teiles glatt, gerade, in entsprechender Perspective erscheinend, das Ende des Astes schmal, länglich walzenförmig, gerade, die Enden abgerundet; der untere Teil ist dicht, lang, der Ast kurz und spärlich behaart; Farbe: der Quadratteil grün, der Ast schwarzbraun. — Analsegment 0·25 *mm* hoch, die vordere Seite gerade, die hintere ziemlich gleichmäßig bogenförmig, nach hinten erweitert, die größte Breite in der Mitte der Höhe beträgt 0·15 *mm*; die Spitze ist gerade abgestutzt, der Analring nicht selbständig und abgesetzt; behaart ist namentlich die obere Hälfte am hinteren Umriße.

♀ Körperende. — Analsegment von oben länglich keilförmig, um den Anus breit, je weiter nach hinten, desto mehr und mehr gleichmäßig verengt, bis am Ende dünn, spitzig ausgezogen; seitliche Länge 0·55 *mm*, die größte Breite 0·15 *mm*; der obere Umriß gleichmäßig leicht konkav, das Ende abgerundet und nach oben gerichtet, die untere Seite des dünnen, etwa ein Drittel der ganzen Länge bildenden Schnabels, gerade, leicht wellenförmig; die vordere, obere Partie des Segmentes um den Anus scheint schwächer chitinisiert zu sein; dieser Unterschied ist nicht leicht sichtbar infoge der vollständigen Apigmentation; ein Ring von kleinen Haaren um den Anus, feine kleine Haare am oberen Umriß, spärliche Behaarung des Basalteiles, dichte Behaarung des Schnabels und des Endes, einige längere Haare am Buckelorte. Es sind keine Dornen. Farbe lichtgrün. — Anus 0·15 *mm* im langen D., Analdrüsenring geschloßen, mit zweireihigen Öffnungen. — Genitalsegment von der Seite länglich dreieckförmig, die Oberseite nach oben bogenförmig ausgebuchtet, 0·45 *mm* lang, die vordere 0·20 *mm*, gerade, senkrecht, die untere gerade, horizontal, 0·45 *mm* lang; das Ende von der Oberseite her verschmälert, lang, dünn ausgezogen, dicht, zerstreut behaart, lichtgrün. — Äußere Legescheiden reichen nach hinten nicht über das Ende des unteren Segmentes, sie sind am freien Ende abgerundet. — Äußerer Legestachel: der Körper leicht chitinisiert, kurz, fein geritzt, am oberen Umriß eine schmale Leiste, das Ende stark chitinisiert, lang, meßerförmig, leicht nach oben gebogen, die Spitze verschmälert und abgerundet, ohne Zähne. — Innerer Legestachel hat das Ende dreieckförmig, unten eine Leiste, das Ende ziemlich spitzig, von oben nach unten abgerundet und einen kleinen Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach Exemplaren, die ich in Köni-

ginhof a. E. Böhmen und in Schlesien, Michalkowitz gefunden habe, angefertigt.

Größe 2·80 *mm*.

Nährpflanze Cirsium arvense Sc.

Lebensweise. — Es überwintern Imagines, im Frühjahre Kopula und Eierlegen; Larven sitzen an der Unterseite der Blätter von Cirsium arvense und verursachen eine wellenförmig gekräuselte Einrollung der Blattränder nach unten; je nach der größeren oder geringeren Anzahl der Larven, welche auf einem Blatte sich vorfinden, hat auch diese Deformation eine größere oder geringere Ausdehnung; bei zahlreicher Besetzung mit Larven sind die Blätter von beiden Seiten bis zur Mittelrippe eingerollt, verschiedenartig gekrümmt oder gedreht und überdies auf der Oberseite höckerig uneben. Eine Änderung in Farbe und Konsistenz findet bei dieser Blattdeformation nicht statt. Die Verwandlung der Larven zu Imagines beginnt in den ersten Julitagen (Loew 88).

Larven hat Loew 1888 beschrieben.

Vorkommen und Zahl: wahrscheinlich überall, aber spärlich.

Geographische Verbreitung: Austria inf. auf den Feldern um Seebenstein (Loew). Böhmen: Königinhof a. E. 23. VII. 95 (Šulc); Michalkowitz 11. III. 06. von den Koniferen abgeklopft (Šulc).

Literatur und Sinonymie.

agrophila, Loew F., Übersicht der Psylliden von Oest. Ung. W. z. b. Ges. 1888.
„ Puton, Catalogue. Caën, 1899.
„ Ošanin B., Verzeichnis, Petrsburg, 1907.

---

10. **Trioza viridula** Zett 1828.

Kopf. — Scheitel hinten gerade, 0·30 *mm* breit, 0·22 *mm* in der Mittellinie lang, die hinteren Ecken abgestutzt, je ein Punktauge tragend, die vorderen Ecken ziemlich schmal, abgerundet. — Die Fühler nur 0·70 *mm* lang, fadenförmig, die letzten 2 Glieder dicker; Sinnesgruben wie bei *urticae L.* — Stirnkegel nur 0·12 *mm* lang, von breiter Basis allmählich verschmälert, äußerst gering divergierend, die Gipfel abgerundet, behaart. — Färbung: ganz hellgrasgrün oder gelblichgrün, auf dem Scheitel bisweilen mit rötlichem, gelbem, oder bräunlichem Anflug; Fühler gelb-

lichweiß, die 2 letzten Glieder und die Spitze des 8. (sehr selten die 4 letzten Glieder) schwarzbraun, Glied 1 und die Basis von 2 nicht selten braun oder schwarz. — Stirnkegel häufig an der Spitze gebräunt oder schwärzlich; Kehlzapfen stets schwarz.

Thorax hellgrün, Zeichnung genau begrenzt oder sehr ausgedehnt und zusammenfließend, ockergelb, oder sogar rötlich und bräunlichgelb verwischt.

Vorderflügel 2·15 *mm* lang und 0·90 *mm* die maximale Breite. — Flügelende verschmälert, die Spitze stumpf oder abgerundet, Flügelgipfel am Ende des vorderen Drittels, die vordere Hälfte des Bogens nur ein wenig mehr gebogen als die hintere. — Adern: *Rs* nur leicht wellenförmig, er endigt über dem Ende des inneren Drittels der *M*1 + 2 oder über der Mitte des Randes der *cell.* *M*3 + 4; *M* lang, Gipfel im Ende des inneren Drittels, *M*1 + 2 ein wenig länger als *M*3 + 4, beide gerade: *Cu*1 kreisbogenförmig. — Farbe: lichtgelb bei waßerheller Membran, bei gelblicher Membran in der äußeren Hälfte lichtbraun, dann sind auch die Rippen dortselbst fein bräunlich gefärbt. — Flügelmembran: wasserhell oder gelblich; Membrandornen wie bei *cerastii* H. Loew: Oberflächedornen bedecken alle Felder; es sind überall gleichmäßig breite, dornenfreie Streifen vorhanden, nur in *cell. Cu* treten der *R* + *M* + *Cu* die Dornen dicht an; neben dem Rande *cell. Rs* ist ein dornenfreier Streifen; in den *cell. M* 1 + 2, *M* und *Cu* 1 sind die Dornenfelder gegen die Ränder schräg abgestutzt. — Die Dornen sind deutlich, genügend groß, auf 0·01—0·02 *mm* in Drei- und Vierecken von einander stehend; die Unterflächedornen sind nur in den äußersten Teilen der *cell. Rs* entwickelt; Marginaldornen wie bei *urticae L.*

Hinterflügel: wie bei *urticae L.*

Beine hellgrün, hellgrünlichgelb, Klauen, das letzte Tarsalglied und die Schenkel oben und hinten mehr oder weniger schwäzlichbraun.

♂ Körperende. — Genitalsegment von der Seite länglich, 0·20 *mm*, niedrig, 0·14 *mm*, nach unten und hinten gleichmäßig bogenförmig, ungleichmäßig behaart, grünlichgelb. — Kopulationszange: von der Seite gesehen, sehr niedrig: 0·10 *mm* und ebenso breit, in Form eines Quadrates, deßen Seiten leicht konvex und Ecken breit abgerundet sind; aus der hinteren, oberen Ecke ragt schräg nach oben und hinten ein kurzer 0·02 *mm*, am Ende oben horizontaler, hinten senkrechter kurz abgestutzter Fortsatz sodaß eine

rechtwinklige scharfe Spitze gebildet wird; — von oben gesehen, heben sich die vorderen $^2/_3$ des Oberrandes empor, werden wulstig, vorne schmal, hinten in eine scharfeckige, deltoidförmige Zacke erweitert; die vordere und hintere Ecke der Zange sind breit abgerundet; — von hinten, der quadratförmige Basalteil ist beinahe gleich breit, nur gegen das breit abgerundete Ende ein wenig verschmälert, der rechtwinklig zugeschnittene Fortsatz ist nach oben und innen gerichtet und erscheint in entsprechender Perspektive; Behaarung unregelmäßig; Farbe des Quadratteiles hell grünlichgelb, des Fortsatzes tief schwarzbraun.

♀ Körperende. — Analsegment von oben kurz keilförmig, um den Anus bedeutend breit, das Ende von den Seiten schräg abgestutzt; — von der Seite, auf den ausgekochten und montierten Präparaten 0·43 *mm* lang, 0·13 *mm* breit, der obere Umriß unter dem Anus ein wenig konkav, dann auf der Buckelstelle und namentlich kurz vor der Spitze deutlich konvex, der untere Umriß leicht wellenförmig, die Partie seitlich und vor dem Anus schwächer chitinisiert; ein Ring kleiner Haare um den Anus, spärliche kurze Haare auf den Seiten, mehrere kurze Haare und einige längere auf dem letzten Viertel des Segmentes; Farbe hellgrünlichgelb. — Anus 0·18 *mm* lang, breit, ringsum ein geschloßener Drüsenring mit zweireihigen Öffnungen. — Genitalsegment: oberer Umriß deutlich S-wellenförmig, 0·30 *mm* lang; vorderer 0·28 *mm*, nach vorne leicht abgerundet, stumpfwinklig, der untere fast gerade, 0·35 *mm*; das hintere Drittel in einen schmalen Schnabel ziemlich rasch verschmälert, das Ende zugespitzt; die ganze Seite und der Schnabel zerstreut kurzhaarig. — Äußere Scheiden reichen bis zum Ende des Genitalsegmentes, sie sind nach hinten abgerundet, auf der unteren, hinteren Hälfte mit winzigen spitzigen Dornen besetzt. — Äußerer Legestachel: das Endstück stark chitinisiert, gerade, das Ende von unten nach hinten schräg abgestutzt, oben mit zwei scharfwinkligen Zähnen, unten gleichfalls zwei Zähne, von denen der hintere klein, der vordere breit abgerundet ist. — Innerer Legestachel: kurz dreieckbeilförmig, an dem unteren Umriße eine Leiste, das Ende stumpf abgerundet, der obere Umriß stärker chitinisiert, ein winziger Nabel.

Diese Beschreibung wurde nach den ♂♂ Individuen, die ich in Michalkowitz, Teschner Kreis auf den Koniferen gefunden habe und nach den ♀♀ aus den Materialen Loew's, Wiener Hofmuseum, loc.: Austr. inf., angefertigt.

Körpergröße: 2·65 *mm*.

Nährpflanze: Daucus carotta L., Petroselinum sativum Hffm. nach Prof. M. O. Reuter in Finnland auch Cerefolium silvestre Bess. (= Anthriscus silvestris Hoffm.) (Loew).

Lebensweise: die Imagines erscheinen vom Juli an und überwintern. — Kopula und Eierlegen im Frühjahr; die Larven leben auf der Unterseite der Blätter, deren Fiederteilchen infolge der gelegten Eier nach unten eingebogen und zuweilen auch etwas höckerig aufgetrieben sind.

Larven bekannt, aber unbeschrieben.

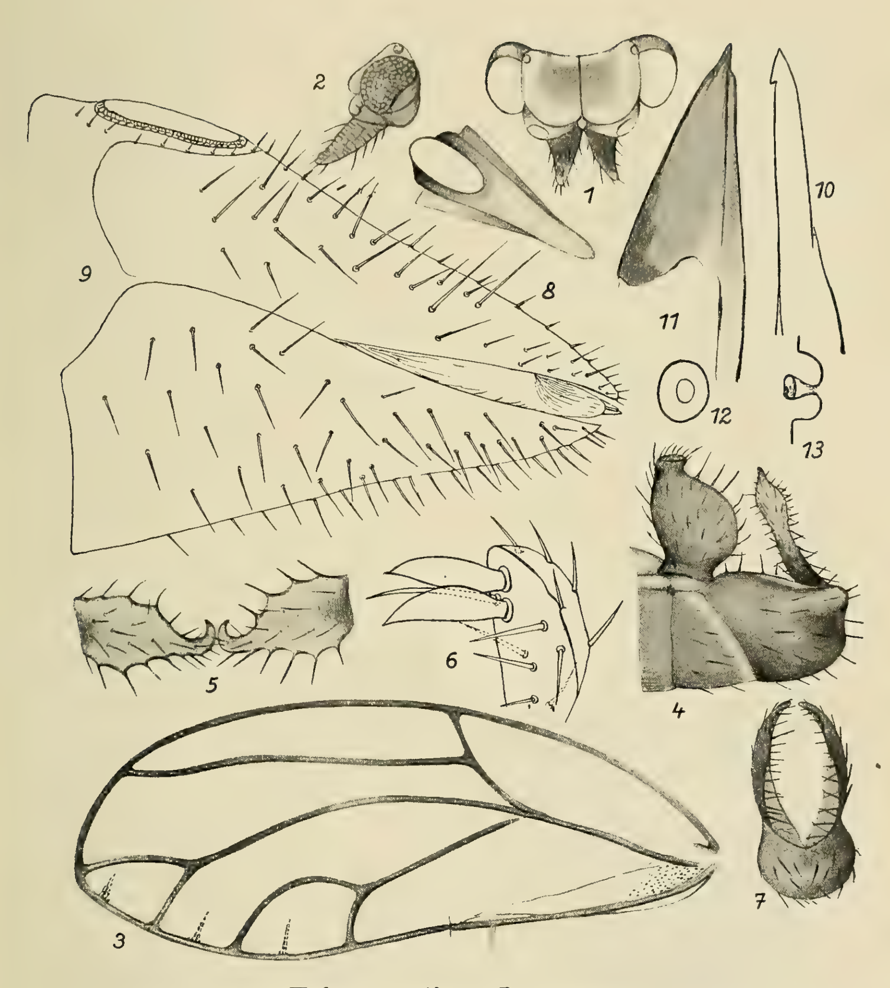
Vorkommen überall, im Frühjahr immer auf den Koniferen zu finden.

Geographische Verbreitung: Gallia, Helvetia, Germania, Britannia, Suecia, Rossia (Lapponia, Fennia, Caucasus), Romania, Italia.

Böhmen: Duda, Catalogus 1892; Mus. R. Boh. coll. Duda, Kysibl, leg. Duda; Böhmen, im Frühjahr auf den Koniferen, Šulc.

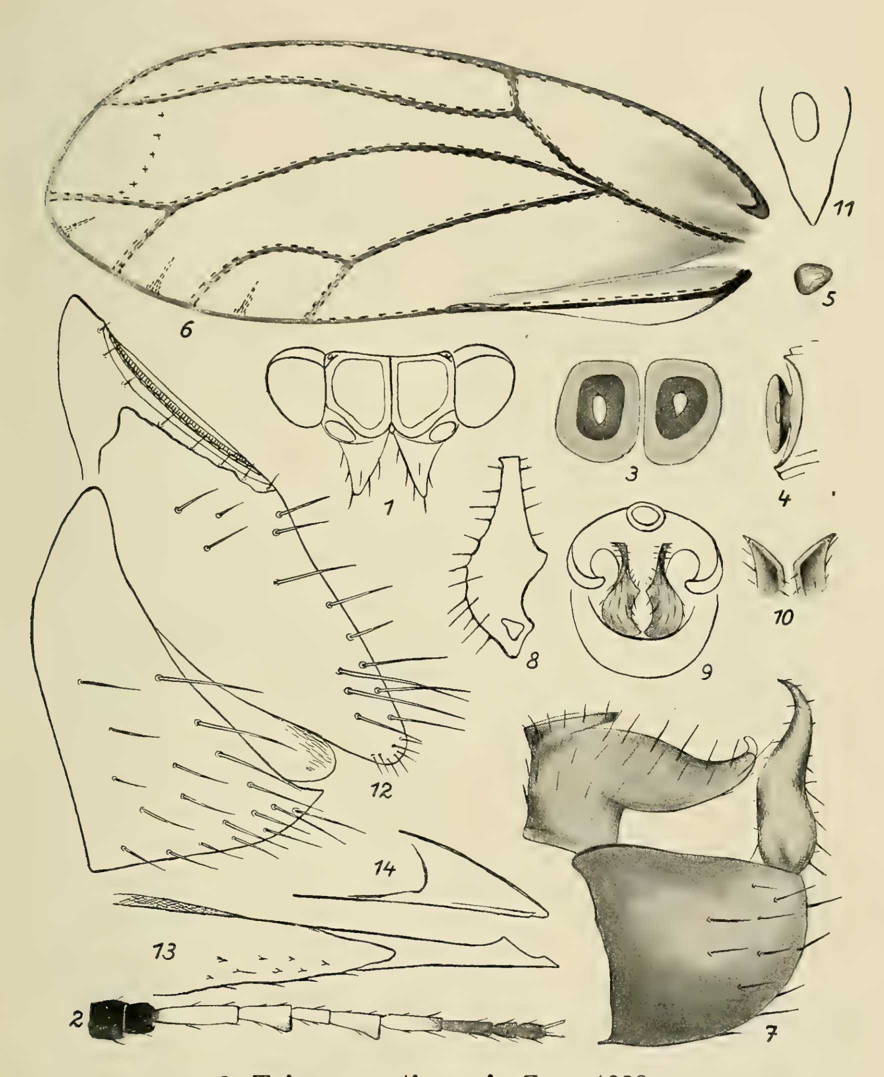
Literatur und Synonymie.

viridula	(*Chermes*),	Zetterstedt J. W., Fauna Insectorum Lapponica, Hammone 1828.
„	(*Trioza*)	idem, Insecta lapponica, Lipsiae, 1840.
apicalis	„	Foerster A., Übersicht der Psylloden, 1848.
viridula	„	Flor G., Rhynchoten Livlands, Dorpat, 1861.
„	„	Flor G., Zur Kenntnis der Rhynchoten, Moskva 1861.
apicalis	„	Meyer-Duer, Psylloden, Schaffhausen, 1871.
viridula	„	Lethierry, Catalogue des Hémiptères du. d. du. Nord. Lille 1874.
„	„	Scott J., British Psyllidae, Transac. Ent. Soc. Lond., 1876.
„	„	Thomson, Opuscula entom. Lund. 1878.
„	„	Reuter M. O., Catalogus Psyllodearum Fenniae, 1877.
„	„	idem, Sveriges Psylloder, Ent. Tidskrift, Stockholm, 1880.
„	„	Loew W., Katalog der Psylliden, W. Ent. Ztg. Wien, 1882.
„	„	idem, Revision der pal. Psylloden, W. z. bot. Ges. 1882.
„	„	idem, Neue Beiträge, eodem 1886.
„	„	idem, Übersicht der Psylliden von Oest. Ung., eodem, 1888.
„	„	Duda L., Hmyz polokřídlý v Čechách žijící, Pragae, 1892
„	„	Edwards, The Hemiptera Homoptera of Brit. Islands. London, 1894.
„	„	Puton, Catalogue des Hémipteres, Caën, 1899.
„	„	Ošanin B., Verzeichnis der pal. Hemipt. Petersburg, 1907.



1. **Trioza urticae** L., autorum.

1. Kopf von oben. — 2. Derselbe von der Seite. — 3. Vorderflügel. — 4. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 5. Ende der Kopulationszange von oben. — 6. Ende der Kopulationszange (eines Astes) bedeutend vergrößert, Glycerinpräparat. — 7. Kopulationszange von hinten. — 8. ♀ Analsegment von oben. — 9. ♀ Anal- und Genitalsegment von der Seite, Glycerinpräparat. — 10. ♀ Äußerer Legestachel von der Seite. — 11. Innerer Legestachel von der Seite. — 12. Eine Sinnesgrube des 4. Fühlergliedes von oben — 13. Dieselbe von der Seite.



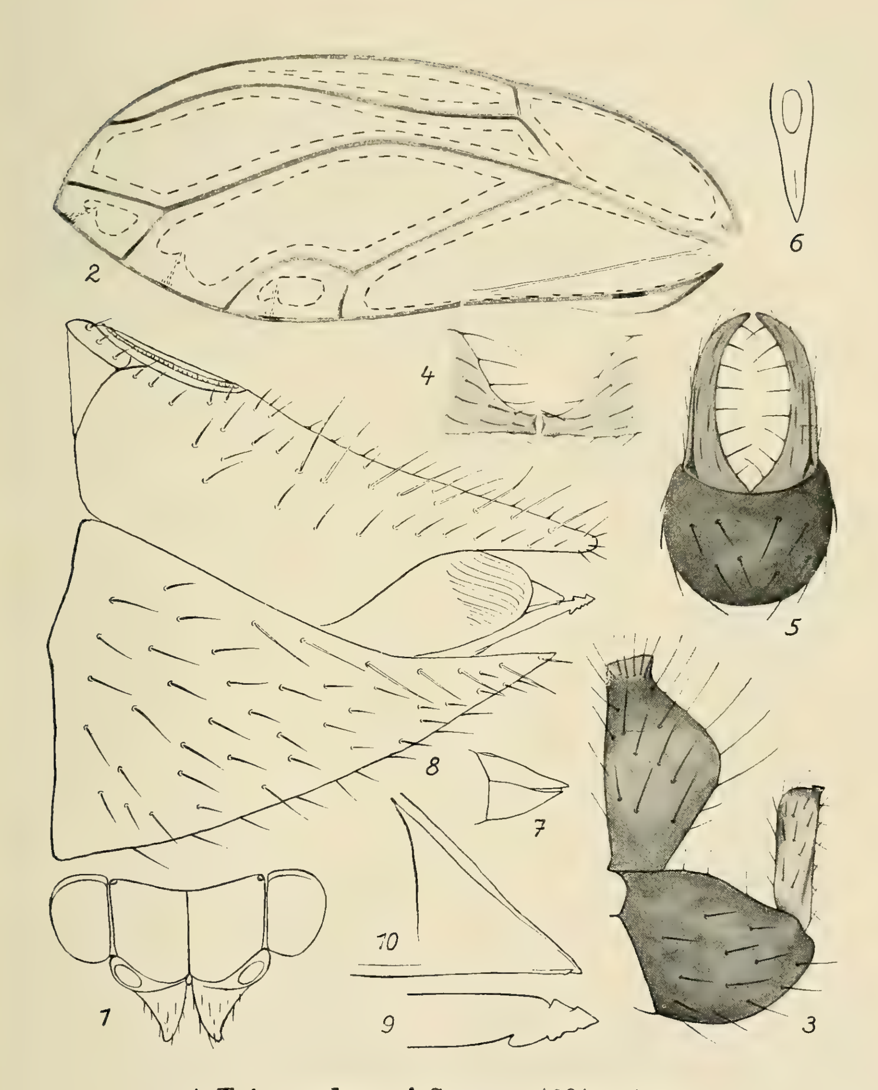
2. **Trioza acutipennis** Zett. 1828.

1. Kopf von oben. — 2. Fühler. — 3. Zwei Sinnesgruben des 4 Fühlergliedes von oben. — 4. Eine derselben von der Seite. — 5. Sinnesgrube des 8. Fühlergliedes. — 6. Vorderflügel. — 7. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 8. Kopulationszange flach ausgebreitet, Glycerinpräparat. — 9. Kopulationszange von hinten (unten Genitalsegment, vorne Analsegment). — 10. Ende der Kopulationszange von oben. — 11. ♀ Analsegment von oben. — 12. ♀ Anal- und Genitalsegment von der Seite (Präperat). — 13. Äußerer Legestachel von der Seite. — 14. Innerer Legestachel von der Seite.



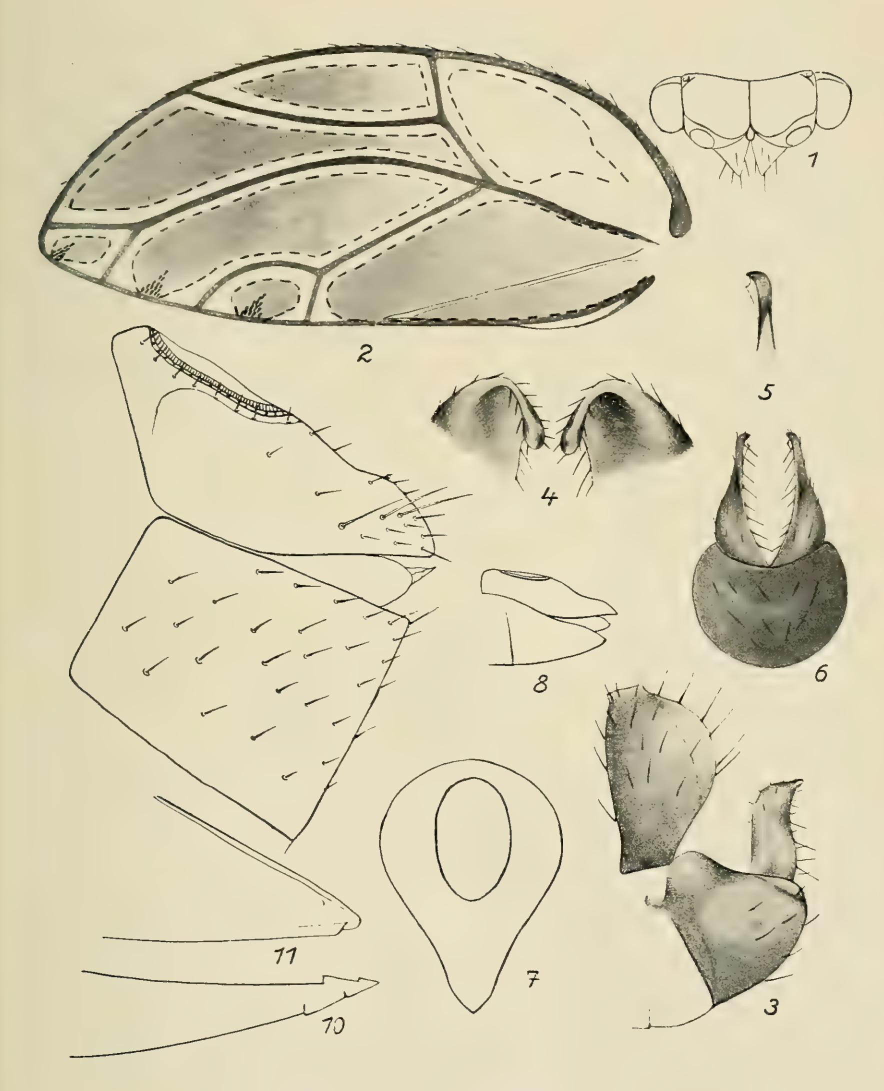
3. **Trioza albiventris** Foerster 1848, autorum.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. Hinterflügel. — 4. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 5. Kopulationszange und Genitalsegment von hinten, nach einem lebendigen Exemplare. — 6. Dasselbe nach einem trocken präparierten Exemplare. — 7. ♀ Analsegment von oben. — 8. ♀ Anal- und Genitalsegment von der Seite (Präparat). — 9. Äußerer Legestachel von der Seite. — 10. Innerer Legestachel von der Seite.



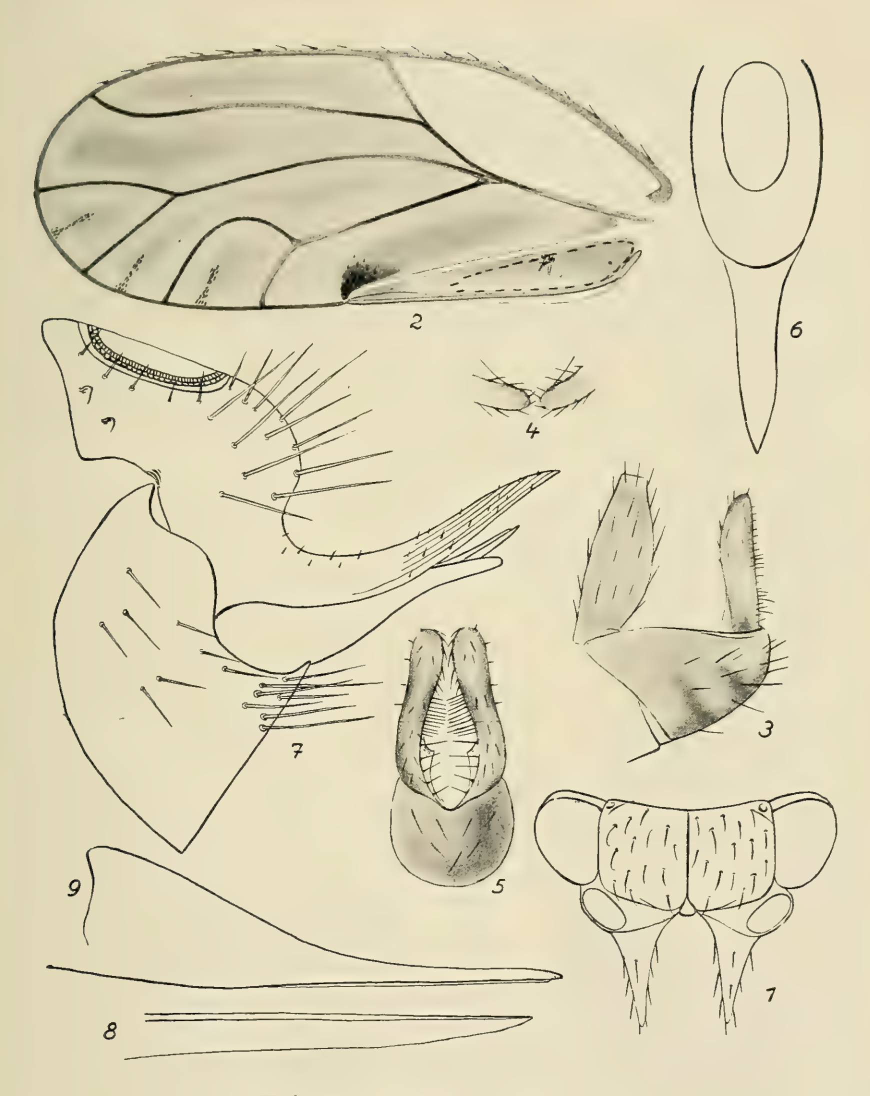
4. Trioza rhamni Schrank 1801 autorum.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 4. Ende der Kopulationszange von oben. — 5. Kopulationszange und Genitalsegment von hinten — 6. ♀ Analsegment von oben. — 7. ♀ Analsegment und Genitalsegment von der Seite, nach einem trockenen Exemplare. — 8. Dasselbe, ein Präparat. — 9. Äußerer Legestachel von der Seite. — 10. Innerer Legestachel von der Seite.



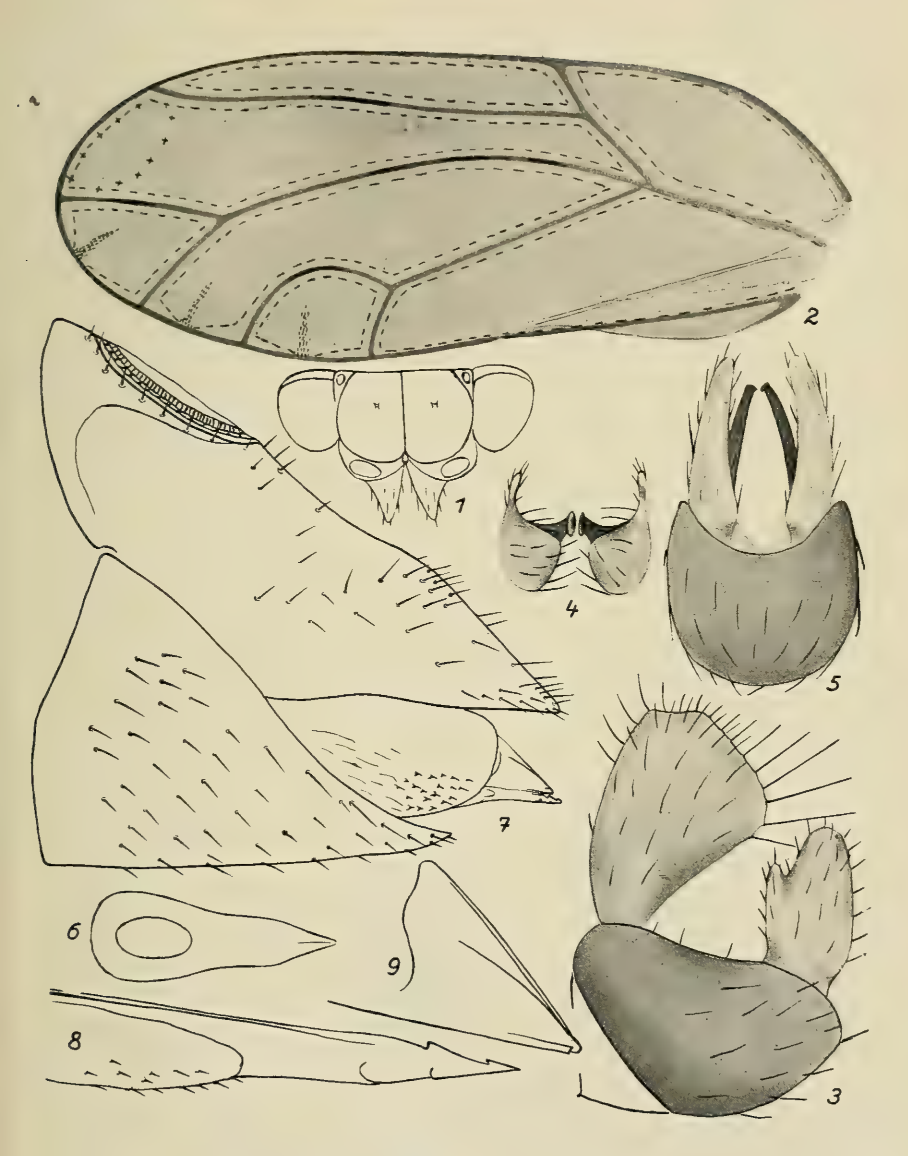
5. **Trioza galii** Foerster 1848.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 4. Ende der Kopulationszange von oben. — 5. Ende einzelnes Astes der Kopulationszange bedeutend vergrößert von hinten. — 6. Genitalsegment und Kopulationszange von hinten. — 7. ♀ Analsegment von oben. — 8. ♀ Analsegment und Genitalsegment von der Seite (Präparat). — 10. Äußerer Legestachel von der Seite. — 11. Innerer Legestachel von der Seite.



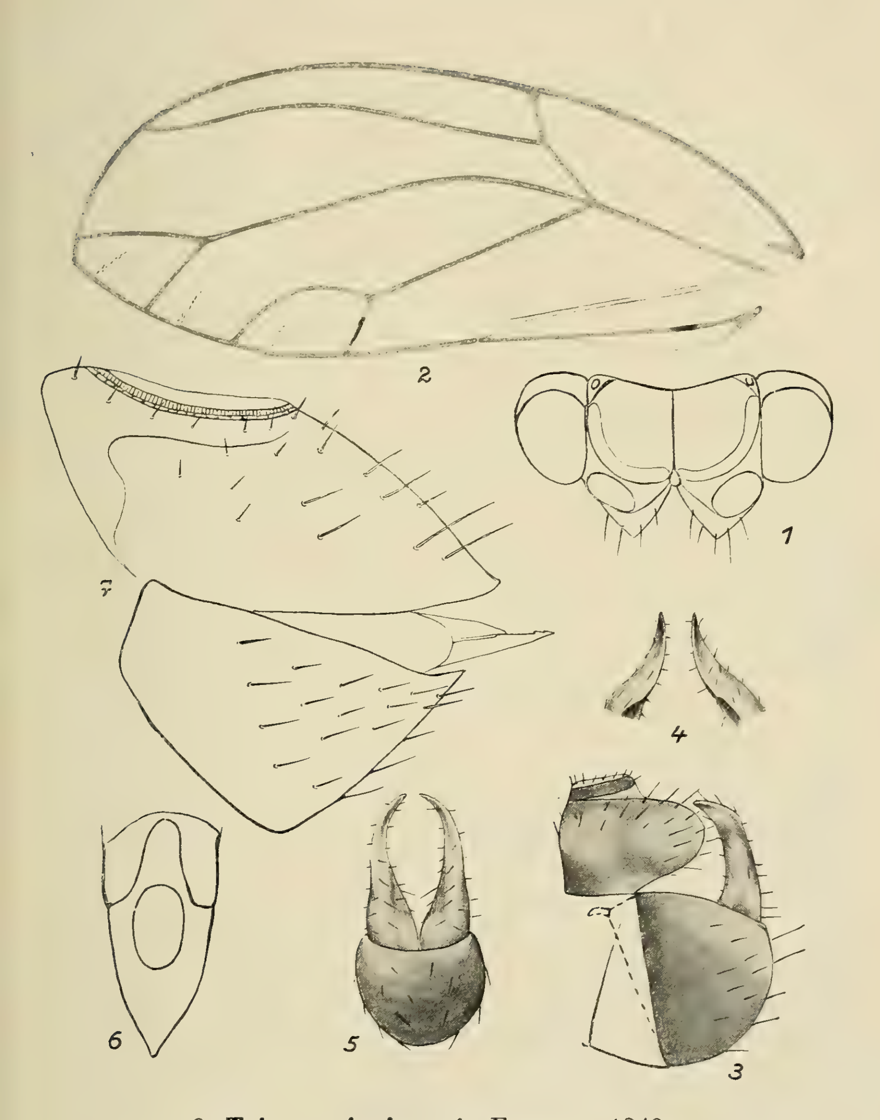
6. **Trioza binotata** Loew 1883.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 4. Ende der Kopulationszange von oben. — 5. Kopulationszange und Genitalsegment von hinten. — 6. ♀ Analsegment von oben. — 7. ♀ Analsegment und Genitalsegment von der Seite. — 8. Äußerer Legestachel von der Seite. — 9. Innerer Legestachel von der Seite.



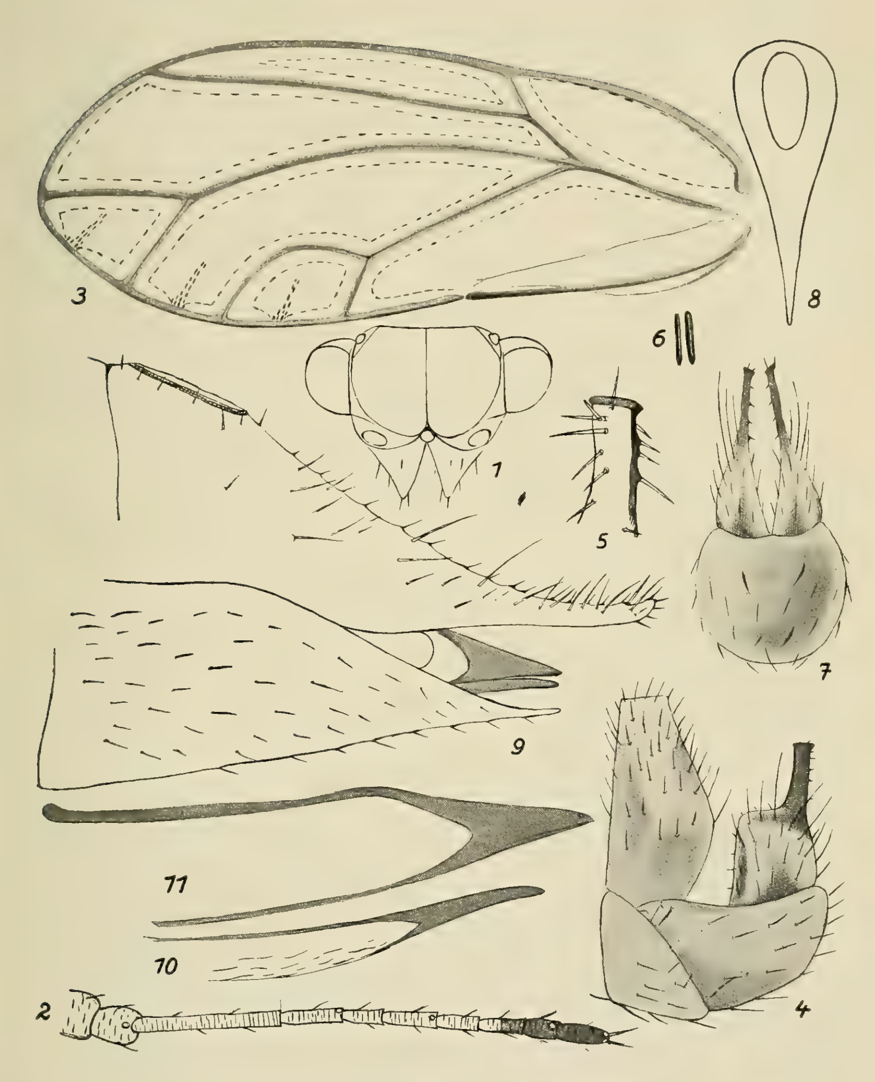
7. **Trioza cerastii** L. 1761, autorum.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 4. Ende der Kopulationszange von oben. — 5. ♂ Kopulationszange und Genitalsegment von hinten. — 6. ♀ Analsegment von oben. — 7. ♀ Anal- und Genitalsegment von der Seite. — 8. Äußerer Legestachel von der Seite. — 9. Innerer Legestachel von der Seite.



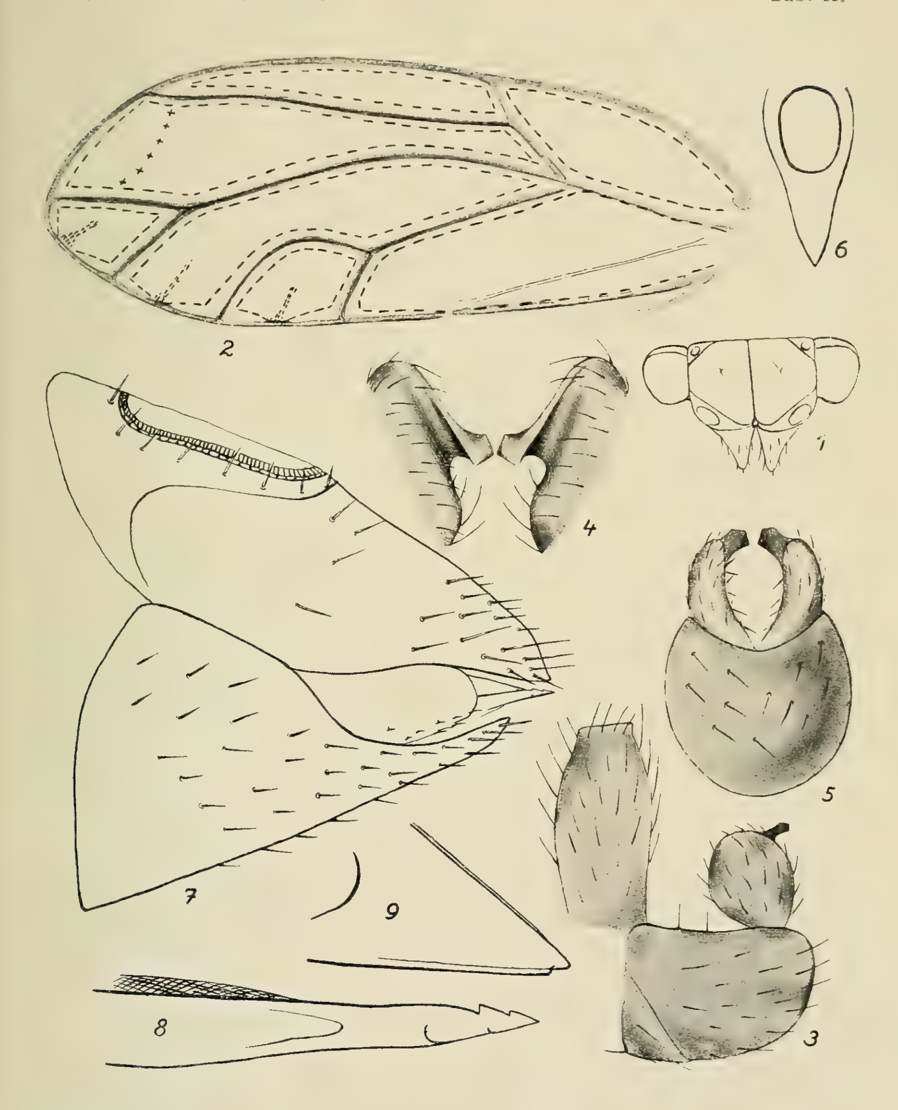
8. **Trioza nigricornis** Foerster 1848.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 4. Ende der Kopulationszange von oben. — 5. ♂ Kopulationszange und Genitalsegment von hinten. — 6. ♀ Analsegment von oben. — 7. ♀ Analsegment und Genitalsegment von der Seite; zwischen beiden befinden sich äußere Scheiden, äußerer und innerer Legestachel.



9. **Trioza agrophila** Loew 1888.

1. Kopf von oben. — 2. Fühler. — 3. Vorderflügel. — 4. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 5. Ende der Zange von der Seite, bedeutend vergrößert, Präparat. — 6. Ende der Zange von oben. — 7. ♂ Kopulationszange und Genitalsegment von hinten. — 8. ♀ Analsegment von oben. — 9. ♀ Anal- und Genitalsegment von der Seite (Präparat) — 10. Äußerer Legestachel von der Seite. — 11. Innerer Legestachel von der Seite.



10. **Trioza viridula** Zett. 1828.

1. Kopf von oben. — 2. Vorderflügel. — 3. ♂ Genitalsegment, Kopulationszange und Analsegment von der Seite. — 4. Ende der Kopulationszange von oben. — 5. ♂ Kopulationszange und Genitalsegment von hinten. — 6 ♀ Analsegment von oben. — 7. ♀ Analsegment und Genitalsegment von der Seite. — 8. Äußerer Legestachel von der Seite. — 9. Innerer Legestachel von der Seite.

XVIII.

Ueber die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe.

Von V. Láska.

(Vorgelegt in der Sitzung den 8. Juli 1910.)

Unter die klassischen Probleme der Meteorologie gehört ohne Zweifel die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe. Schon früh gelang es Formeln aufzufinden und theoretisch zu begründen, welche das mathematische Gesetz des Problems darstellen. In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst auf Grund der Beobachtungen das Problem für die freie Atmosphäre rein empirisch gelöst. Dadurch gewinnt man ein Schema, welches in Verbindung mit der Theorie eine Höhenformel liefert, welche auch in praktischer Hinsicht einiges Interesse beanspruchen dürfte.

Mein Hauptzweck war aber nicht die Aufstellung dieser Formel, sondern die Darstellung eines Verfahrens, welches gestattet die Beobachtungsergebnisse zu kontrolieren. Als Grundlage wurden die Zahlen von Schubert *) benützt. Setzt man

$$u = \frac{H}{100} \qquad v = 100 \, log \frac{762}{b}$$

wo H die Meereshöhe in Metern, sowie b den Luftdruck in Millimetern bezeichnet, so genügen die Erfahrungszahlen der Gleichung:

$$v = \frac{\alpha u}{\beta - u} = \frac{442{\cdot}6\, u}{856{\cdot}2 - u} \quad \ldots\ldots\ldots 1)$$

Mit dieser Formel wurde die Tafel I. berechnet:

*) Zeitschrift für wiss. Erf. der höh. Atmosphäre 1904. S. 148.

Tafel I.

H	b	u	v Beob.	v Rechn.	Diff.
10000	198	100	58·53	58·53	0·00
9000	230	90	52·02	51·99	0·03
8000	266	80	45·71	45·62	0·09
7000	308	70	39·34	39·41	−0·07
6000	355	60	33·17	33·35	−0·18
5000	405	50	27·45	27·45	0·00
4000	462	40	21·73	21·69	0·04
3000	525	30	16·18	16·07	0·11
2000	596	20	10·67	10·59	0·08
1000	674	10	5·33	5·24	0·09

Aus dieser ergibt sich, dass die Werte für $H = 6$ und 7 *km* einer Korrektion bedürften. Schubert sagt von der ersteren Zahl, dass sie durch graphische Interpollation erhalten wurde.

Um die Korrektionen zu finden, wurde v/u berechnet und die Differenzenreihe gebildet, so ergab sich

H km	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
v/u	5·85	5·78	5·71	5·62	5·53	5·49	5·43	5·39	5·33	5·33
Diff.		0·07	0·07	0·09	0·09	0·04	0·06	0·04	0·06	0·00

Die Differenzenreihe ist offenbar bei $H = 6$ und 7 *km* gestört. Nehmen wir 0·07 statt 0·09 an, was jedenfalls der Wahrheit näher kommen dürfte, so folgt für

$H = 7$ *km* $v/u = 5·64$
$H = 6$ *km* $v/u = 5·57$
$H = 5$ *km* $v/u = 5·50$

und nachdem der letztere Wert mit dem Beobachteten sehr nahe übereinstimmt, auch für

$H = 7$ *km* $v = 39·48$ $b = 307$ statt 308
$H = 6$ *km* $v = 33·48$ $b = 353$ statt 355,

Nach dieser Korrektion stellt die Formel 1) die Beobachtungswerte innerhalb der Abrundungsfehler des Luftdruckes, vollkommen dar.

Die Konstanten α und β wurden einfach aus $H=5$ und $10\,km$ abgeleitet, was für den vorliegenden Zweck vollkommen genügt. Erst als man den Luftdruck wird wenigstens auf 0·1 *mm* genau haben, wird es sich empfehlen neue Konstanten zu berechnen.

Es dürfte nicht uninteressant sein, unsere Formel mit den Ergebnissen einer Einzelnfahrt zu vergleichen. Wir wählen dazu den Aufstieg am 26. Juli 1907 zu Strassburg.*)

Das Ergebniss der Rechnung und Beobachtung ist in der Tafel II. zusammengestellt.

Taf. II.

H km	*b mm*		Diff.	*H km*	*b mm*		Diff.
	Beob.	Rechn.			Beob.	Rechn.	
1	674	674	0	11	174	170	+4
2	597	596	+1	12	146	145	+1
3	528	525	+3	13	128	123	+5
4	466	462	+4	14	111	104	+7
5	410	405	+5	15	95	87	+8
6	360	355	+5	16	82	73	+9
7	315	308	+7	17	71	61	+10
8	274	266	+8	18	61	51	+10
9	237	230	+7	19	53	42	+11
10	203	198	+5	20	45	34	+11

Die Differenzen zeigen deutlich den Einfluss der Temperatur. Die obere Inversion lag hier zwischen 11 und 12 *km* Höhe. Diese Tafel beweist die Vollgiltigkeit unserer Formel. Es zeigt sich schön dass die beobachteten Höhen zu gross gegenüber der Rechnung erscheinen.**)

Um dieses noch deutlicher hervortreten zu lassen, stellen wir die Normaltemperaturen nach Schubert und Teisserenc de Bort***) den Beobachteten in der Taf. III und IV entgegen.

*) Siehe Veröff. der Int. Kom. für wiss. Luftschiffahrt. Jahrgang 1907. Heft 8. S. 373.

**) Vergl. A. Wagner, Zur Genauigkeit der Höhenangaben sehr hoher Ballonsondeaufstiege. Met. Z. 1910 S. 170.

***) Die letzteren dem Leitfaden der Wetterkunde von Börnstein entnommen. Die eingeklammerten Werte extrapoliert.

Taf. III.

Höhe	Temperatur		Diff.
	Normal	Beobachtet	
1000	4·7	12·2	+ 7·5
2000	0·0	6·9	+ 6·9
3000	— 5·1	0·9	+ 6·0
4000	— 10·7	— 3·5	+ 7·2
5000	— 16·8	— 9·2	+ 7·6
6000	— 23·2	— 15·5	+ 7·7
7000	— 30·0	— 22·8	+ 7·2
8000	— 37·0	— 29·8	+ 7·2
9000	— 44·2	— 37·5	+ 6·7
10000	— 51·6	— 46·4	+ 5·2

Taf. IV.

Höhe	Temperatur		Diff.
	Normal	Beobachtet	
10000	— 50·1	— 46·4	+ 3·7
11000	— 54·0	— 51·5	+ 2·5
12000	— 55·2	— 51·9	+ 3·3
13000	— 54·4	— 48·5	+ 5·9
14000	— 54·1	— 47·7	+ 6·4
15000	(— 54)	— 48·4	+ (5·6)
16000	(— 54)	— 47·5	+ (6·5)
17000	(— 54)	— 46·5	+ (7·5)
18000	(— 54)	— 45·8	+ (8·2)
19000	(— 54)	— 44·2	+ (9·8)
20000	(— 54)	— 41·3	+ (12·7)

Gehen wir jetzt zur Aufstellung der Höhenformel über. Bekanntlich lässt sich die Grundformel der barometrischen Höhenmessung schreiben wie folgt:

$$A \log \frac{B}{b} = \int_0^h \frac{1 - 0{\cdot}377 \frac{e}{p}}{1 + \alpha t} \frac{g}{G} \, dh.$$

wo die Bedeutung einzelner Grössen sattsam bekannt ist. Nach der Gleichung 1) ist aber (für die freie Atmosphäre)

$$A \log \frac{B}{b} = \frac{ph}{q-h}$$

und somit

$$-A \frac{db}{b} = \frac{pq}{(q-h)^2}\, dh,$$

also

$$f \equiv \frac{1 - 0{\cdot}377 \frac{e}{p}}{1+\alpha t} \frac{q}{g} = \frac{pq}{(q-h)^2}.$$

Daraus ergibt sich nachstehendes Verfahren. Man bestimme die Konstanten p und q aus den Gleichungen

$$f_o \equiv \frac{1 - 0{\cdot}377 \frac{e}{p}}{1+\alpha t} \frac{q}{g} \qquad \text{(für } h = o\text{)}$$

$$f_h \equiv \frac{1 - 0{\cdot}377 \frac{e}{p}}{1+\alpha t} \frac{q}{g} \qquad \text{(für } h = h\text{)}$$

und dann die Höhe aus

$$A \log \frac{B}{b} = \frac{ph}{q-h}$$

Diese Form ist für die Höhenbestimmung nicht geeignet, weil die Zahlen für $h = o$ sich der Beobachtung entziehen. In der Regel pflegt man daher die Höhendifferenz zweier Stationen zu bestimmen.

Für diese gilt die Gleichung

$$A \log \frac{b'}{b} = \varDelta h \frac{p}{q-h} \left\{1 + \frac{1}{q-h}\right\}.$$

Da q rund gleich 100.000 ist, so wird man gewöhnlich das letzte Glied vernachlässigen können. Man hat also

$$\varDelta h = A \frac{q}{p} \left(1 - \frac{h}{p}\right) \log \frac{b'}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Als Beispiel wählen wir*)

*) Siehe Meteorol. Zeitschrift 1909. S. 179 und 563. Die Berechtigung der Anwendung auf dieses Beispiel, folgt aus einer Untersuchung, welche demnächst erscheinen wird.

Sonnblick	Ischl
$b = 519{\cdot}33\ mm$	$b' = 721{\cdot}76\ mm$
$t = -6{\cdot}4^0$	$t' = 8{\cdot}1$
$e = 2{\cdot}4\ mm$	$e' = 5{\cdot}5\ mm$
$\varphi = 47^0\ 3'$	$\varphi' = 47^0\ 43'$
$h = ?$	$h' = 467{\cdot}0$

Zunächst wird mit der Formel

$$\varDelta h = 16{\cdot}000 \frac{b' - b}{b' + b} \left(1 + 0{\cdot}004 \frac{t + t'}{2}\right)$$

ein Näherungswert für h berechnet. Es ergab sich

$$h = 3090\ m$$

und hiemit

$$p = 102013, \qquad q = 105961.$$

Die Formel 2) liefert dann

$$\varDelta h = 2641{\cdot}5\ m$$

Während der strenge nivellierte Wert 2639·5 m beträgt. Die Übereinstimmung ist, da dabei keine Zwischenstation benützt wurde eine überaus gute. Um eine weitere Kontrolle zu haben, nehmen wir die Station Zell am See, für welche

$$b = 696{\cdot}27.$$

Die Rechnung nach der Formel 2) mit den für Ischl-Sonnblick abgeleiteten Konstanten p und q gibt

$$\varDelta h = 296$$

also absolut genau den richtigen Wert. Dadurch ist erwiesen, dass unsere Formel die Verhältnisse so gut darstellt, als eben möglich ist.

Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass die Konstanten p und q mit der Ortslage sich ändern.

Bei kleineren Höhen lässt sich die Rechnung noch etwas vereinfachen.

Man bestimme die Konstanten α und β aus

$$\alpha + \beta h = f$$
$$\alpha + \beta h' = f',$$

dann wird

$$A \log \frac{b'}{b} = \varDelta h \left\{\alpha + \beta \frac{H + H'}{2}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots 3)$$

Ein Beispiel ist wohl überflüssig.

Will man Zwischenstationen benützen, so führt folgende Ueberlegung zum Ziele. Die Gleichung

$$f = \frac{p\,q}{(q-h)^2}$$

zeigt, dass f eine Funktion von h ist, welche sich in eine sehr schnell konvergierende Reihe entwickeln lässt. Es folgt dieses aus dem Umstande, dass p sehr nahe q ist und beide Grössen viel grösser als h sind. Man kann daher die Gleichung 3, verallgemeinern durch die Annahme

$$f = \alpha + \beta\,h + \gamma\,h^2$$

wobei die Koeffizienten aus f_1, f_2, f_3 zu bestimmen wären.*) Die Berechtigung für die Anwendung dieser Formel folgt unmittelbar aus unserer Darstellung. Für die freie Athmosphäre lässt sich x als Funktion von H ohne weiteres darstellen. Es genügt nur zu zeigen, dass die Temperatur (t) und die spezifische Feuchtigkeit (s) Funktionen der Höhe sind.

In der Tat gibt meine nomographische Methode für die freie Atmosphäre die Gleichung:

$$10 - t = \frac{212{\cdot}42\ \mathrm{H}}{44484 - H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Eine Formel, welche bis 9 *km* Höhe gilt und mit H = o aufängt ist, ist die Nachstehende:

$$t_H - t_0 = -\frac{110\,H^2}{32 + 25H - H^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Für die spezifische Feuchtigkeit gilt die Formel

$$s = \frac{9240 - H}{0{\cdot}53\,H + 1370} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Gl. 4) und 6) gelten für $10.000 > H > 1500\,m$. Das Verteilungsgesetz von t und s in den unteren Schichten, wird erst auf Grund von langjährigen Balonfahrten bestimmt werden können, da bekanntlich die Bergobservatorien hiezu ungeeignet sind.

Die Uebereinstimmung der Formen mit den Beobachtungen bezeugen die Tafeln V. und VI.

---

*) An eine ähnliche Methode dachte bereits Sprung. Siehe dessen Lehrbuch der Meteorologie S. 90.

Taf. V.

H	s		Differenz
	Beob.	Ber.	
2.000	3·00	3·00	0.00
3.000	2·17	2·10	+ 0·07
4.000	1·54	1·50	+ 0·04
5.000	1·07	1·05	+ 0·02
6.000	0·70	0·71	− 0·01
7.000	0·40	0·44	− 0·04
8.000	0·18	0·22	− 0·04
9.000	0·05	0·04	+ 0·01

Taf. VI.

H	t		Differenz
	Beob.	Ber.	
2.000	— 0·0	— 0·0	0·0
3.000	— 5·1	— 5·1	0·0
4,000	— 10·7	— 10·9	+ 0·2
5.000	— 16·8	— 16·8	0·0
6.000	— 23·2	— 23·1	— 0·1
7.000	— 30·0	— 29·8	— 0·2
8.000	— 37·0	— 36·6	— 0·4
9.000	— 44·2	— 43·9	— 0·3
10.000	— 51·6	— 51·6	0·0

Die Bedeutung der hier gewonnenen Relationen für theoretische Meteorologie liegt an der Hand. Solche Gleichungen sind unentbehrlich bei allen theoretischen Untersuchungen; man kann ja nicht eine Zahlentabelle in die Rechnung einstellen, sondern nur eine Formel, welche die Zahlenwerte derselben auf einen möglichst kurzen und doch genauen Ausdruck bringt. Eine weitere Forderung, welche wir stellen müssen, ist jene der Integrierbarkeit. Die Formeln sollen in entsprechende Differenzialgleichung eingesetzt, dieselbe integrabel machen. Genügt eine Formel dieser Forderung nicht, dann kann sie nur als

Ersatz einer Zahlentafel gelten. Die Formeln sollen ferner eine Zahlenreihe vollkommen erschöpfen d. h. eine Formel soll die Erfahrungskurve so lange darstellen, so lange dieselbe ihren analytischen charakter nicht ändert. Die Wärmeabnahme mit der Höhe lässt sich beispielsweise nicht durch eine einzige analytische Kurve darstellen, sie besteht vielmehr aus verschiedenen analytischen Zweigen, welche durch Übergangskurven verbunden sind. Daher die Begrenzung auf das Intervall $10.000 > H > 1500$.

Allen diesen Forderungen entsprechen unsere Gleichungen vollkommen.

Die Gleichung 4) ersetzt die bekannte Relation von MENDELEJEF, welche für $H > 4000$ geradezu unbrauchbar wird. Sie und die Gleichung 6) sind gewiss bequemer und genauer, als die von SÜRING entwickelten besonders in Hinsicht auf die Integrierbarkeit.

Die interessanteste Eigenschaft ist aber die nachfolgende: Konstruiert man mit H ein projektivisches Strahlenbüschel, dann liegen die drei mit den Korrespondierenden

$$\log. b, s, t$$

Werten kotierten Geraden, zu demselben perspektivisch Es ist dieses eine unmittelbare Folge der Gleichungen 1), 4), und 6). Man kann also gewissermassen sagen, dass innerhalb des Giltigkeitsbereiches dieser Formel, die freie Atmosphäre projektivisch gebaut ist.

SEZNAM ODBOROVÝ

Věstníku král. Sp. Náuk, třídy math.-přírod., za rok 1910.

FACHREGISTER

der Sitzgber. d. kön. böhm. Gesellsch. d. Wiss., math.-naturw. Klasse im J. 1910.

I. Mathematika, Geometrie, Klimatologie.

IV. Grünwald Ant., Die bifokale Abbildung von Kreiskegeln auf die Punkte der Ebene. 60 S., mit 8 Textfiguren und 1 Tabelle.

V. Zahradník K., Einige Eigenschaften der Oskulationstripel am Kegelschnitte. 6 S.

VII. Jeřábek W.. Zur Schattenkonstruktion der Plückerschen Konoids. 13 S., 2 Textfiguren.

XI. Láska V., Zur Reduktion klimatologischer Elemente. 25 S., mit 2 Textfig.

XV. — —, Zur Theorie der Niederschläge. 7 S., mit 4 Textfig.

XVIII. — —, Über Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe. 9 S.

II. Chemie.

II. Milbauer Jaroslav, Studie o výrobě minia. 7 str., 2 obr. v textu.

X. — —, Drobná sdělení o některých sloučeninách tetramethylamonia. 8 str., 2 obr. v textu.

XIII. Hanuš a Petřík Ferd., Modifikace methody ethylestherové k důkazu kokosového tuku v másle. 17 str.

III. Geologie, palaeontologie.

VI. Fritsch Ant., Über Lagerung von cenomanen und diluvialen Sedimenten Mit 5 Textfig.

XII. Počta F., Über eine Stromatoporoide aus böhmischem Devon. 7 S. 1 Taf.

IV. Biologie.

I. Mencl E., Jádro a jeho dělení u Micrococcus ochraceus a Sarcin. 6 str. 2 obr. v textu.

III. Šulc Karel, „Pseudovitellus“ und ähnliche Gewebe der Homopteren sind Wohnstätten symbiotischer Saccharomyceten. 39 S., 18 Textfig.

VIII. Velenovský Jos., Letzte Nachträge zur Flora der Balkanländer. 13 S.

IX. Štolc Ant., Über die intracellulare Agglutination und verwandte Erscheinungen bei Pelomyxa. II. Mitt. 8 S.

XIV. Šulc Karel, Symbiotische Saccharomyceten der echten Cicaden (Cicadidae). 6 S., 4 Textfig.

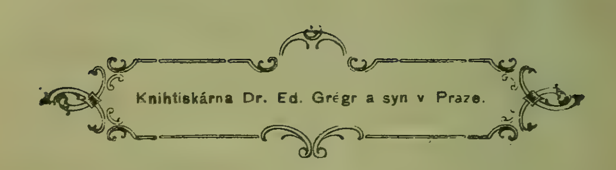
XVI. Štolc Ant., O encystaci Pelomyxy. 5 str. (Deutsch. Résumé S. 5—7) 1 tab.

Abecední seznam prací,

za rok 1910 uveřejněných ve Věstníku math.-přírodovědecké třídy.

Alphabetisches Verzeichniss

der im J. 1910 veröffentlichten Arbeiten der math.-naturwissenschaftl. Klasse.


Knihtiskárna Dr. Ed. Grégr a syn v Praze.




New York Botanical Garden Library
3 5185 00313 4135

